ANNAMALAI UNIVERSITY

கோண கணிதம்

(TRIGONOMETRY)



அண்ணமலைப் பல்கலைக்கழகத்தாரால்
வெளியிடப்படுவது

1949

ANNAMALAI UNIVERSITY

கோண கணிதம்

(TRIGONOMETRY)

ஆக்கியோன் :

T. K. மாணிக்கவாசகம், M. A., L. T.,

கணித ஆசிரியர்,

டாக்டர் அழகப்ப செட்டியார் கல்லூரி,

காரைக்குடி



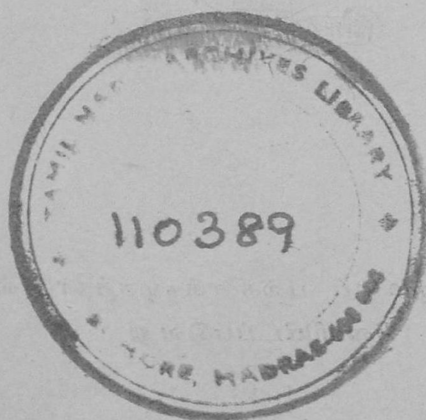
அண்ணாமலைப் பல்கலைக்கழகத்தாரால்

வெளியிடப்படுவது

—

1949

Printed at :
The Trichinopoly United Printers Limited.
Trichinopoly – 4-5-49—500



முன்னுரை

நம் நாட்டுத் தலைவர்கள் கல்லூரிப் பாடங்களையும் தாய்மொழி யில் ஐந்தாண்டளவில் கற்பிக்க வேண்டுமென்று கூறி வருகின்றனர். அக்கொள்கை போற்றத்தகுந்ததில் ஒன்றாகும். அதற்குரிய பாடப் புத்தகங்கள் தமிழ் மொழியில் இல்லாதது ஒரு பெருங் குறையேயாகும். அக்குறையை நீக்கும்பொருட்டு யானும் "கோண கணிதம்" (Trigonometry) என்னும் நூலை தமிழ் மொழியில் எழுத முற்பட்டேன்.

தென்னிந்திய பல்கலைக்கழக நடுத்தர வகுப்புக்குரிய கோண கணிதப் பகுதிகள் இந்நூலின்கண் அடங்கியுள்ளன. இந்நூலில் சென்னை மாகாணத் தமிழ்ச்சங்கத்தினின்றும் வெளியிடப்பட் டுள்ள கலைச்சொற்கள் கையாளப்பட்டுள்ளன.

இந் நூலை எழுதி வெளியிடும்படித் தூண்டியும், அதையே அச்சிட்டு உதவியும் செயலாற்றிய அண்ணாமலைப் பல்கலைக்கழகச் செயற்குழுவினருக்கும், இந்நூலை எழுதிவருங்கால் அவ்வப் போது எனக்கு ஆலோசனை கூறிவந்த ஆந்திர பல்கலைக்கழகப் பேராசிரியர், டாக்டர் A. நரசிங்க ராவ், M.A., L.T., D.Sc., அவர்களுக்கும், கையெழுத்துப் பிரதியைப் பார்வையிட்ட அண்ணாமலைப் பல்கலைக் கழகத் தமிழாசிரியர் வித்துவான் க. வெள்ளைவாரணனார் அவர்களுக்கும், அச்சுப் பிரதியைப் பார்வையிட்டு உதவி புரிந்த எனது நண்பர் வித்துவான் க. தேசிகன் அவர்களுக்கும் எனது நன்றி உரித்தாகுக.

காரைக்குடி,
2-5-'49.

T. K. மாணிக்கவாசகம்

பொருளடக்கம்

வாய்பாடுகள்

	தொகுதி	பக்கம்
$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$	15	9
$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$	15	10
$1+\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta$	15	10
$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$, $\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\cot\theta$	15	11
$\sin 0^\circ=0$; $\cos 0^\circ=1$; $\tan 0^\circ=0$ $\operatorname{cosec} 0^\circ=\infty$, $\sec 0^\circ=1$, $\cot 0^\circ=\infty$	19	22
$\sin 90^\circ=1$, $\cos 90^\circ=0$, $\tan 90^\circ=\infty$ $\operatorname{cosec} 90^\circ=1$, $\sec 90^\circ=\infty$, $\cot 90^\circ=0$	20	
$\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$, $\tan 60^\circ=\sqrt{3}$ $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$	21	23
$\sin 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\tan 45^\circ=1$	22	24
$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$, $\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$ $\tan(90^\circ-\theta)=\cot\theta$, $\operatorname{cosec}(90^\circ-\theta)=\sec\theta$ $\sec(90^\circ-\theta)=\operatorname{cosec}\theta$, $\cot(90^\circ-\theta)=\tan\theta$	23	26
$\sin(-\theta)=-\sin\theta$, $\cos(-\theta)=\cos\theta$ $\tan(-\theta)=-\tan\theta$. $\operatorname{cosec}(-\theta)=-\operatorname{cosec}\theta$ $\sec(-\theta)=\sec\theta$, $\cot(-\theta)=-\cot\theta$	35	45
$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$, $\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$ $\tan(90^\circ-\theta)=\cot\theta$, $\operatorname{cosec}(90^\circ-\theta)=\sec\theta$ $\sec(90^\circ-\theta)=\operatorname{cosec}\theta$, $\cot(90^\circ-\theta)=\tan\theta$	36	46
$\sin(90^\circ+\theta)=\cos\theta$, $\cos(90^\circ+\theta)=-\sin\theta$ $\tan(90^\circ+\theta)=-\cot\theta$, $\operatorname{cosec}(90^\circ+\theta)=\sec\theta$ $\sec(90^\circ+\theta)=-\operatorname{cosec}\theta$, $\cot(90^\circ+\theta)=-\tan\theta$	37	47
$\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$, $\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$ $\tan(180^\circ-\theta)=-\tan\theta$, $\operatorname{cosec}(180^\circ-\theta)=\operatorname{cosec}\theta$ $\sec(180^\circ-\theta)=-\sec\theta$, $\cot(180^\circ-\theta)=-\cot\theta$	38	48

அதிகாரம் 1

கோணங்கள் அளக்கும் முறைகள்

1. முன்னுரை:—பண்டைக் காலத்திலே, கணிதநூற்றுறைகள் பல பல இந்திய நாட்டில் தோன்றி வளர்ந்து வந்தன. அத்துறைகளில் ஒன்று கோண கணிதமாகும். கணிதப் பேராசிரியர்களான ஆரியபட்டர், பிரமகுப்தர், பாஸ்கரர் முதலியோர் இச்சிறு குழவியை வளர்த்த பெரு மக்களாவர். அவர்கள் இத்துறை நூலை வளர்த்து ஆளாக்கி உலகினுக் கீந்தனர் என்றால் தற்பெருமையாகாது. அன்னாரின் பெரும் பெரும் கணித நூல்கள் அரபி மொழியில் மொழிபெயர்க்கப்பட்டு, அரபிநாட்டின் வாயிலாய் ஐரோப்பிய நாடுகளை நண்ணியது.* இந்தியாவினின்றும் ஊற்றெடுத்துச் சென்ற இச் சாத்திரம் ஐரோப்பிய நாடுகளில் பாய்ந்து பேராறாக மாறியது. 17ஆம் நூற்றாண்டின் ஆரம்ப முதற்கொண்டு இத் துறையில் வளர்ச்சி ஆக்கம் பெற்றது.

இச்சாத்திரத்திற்கு ஆங்கிலத்தில் '**Trigonometry**' என்று பெயர். கிரேக்க மொழியில் '**Trigonometry**' என்ற சொல் 'முக் கோணத்தின் அளவு' எனப்பொருள்படும். ஆனால் இந்நாளில் கோண கணிதத்தின் ஒரு பிரிவே முக்கோணத்தைப்பற்றியதாகும். ஒரு பெரும் பகுதி மட்டகோணகணிதமெனவும் (**Plane Trigonometry**), மற்றோர் பகுதி கோளகோணகணிதமெனவும் (**Spherical Trigonometry**) அமைந்திருக்கின்றன.

---

* "The Science of Trigonometry, in its infancy was fostered on the Indian Soil and several distinguished Hindu mathematicians like Aryabhatta, Brahma Gupta and Bhaskara, have contributed in no small measure for its advancement. Their mathematical works embodying the results of their researches were translated into Arabic by the Arabs and through them they reached Europe."

"Trigonometry was invented to supply practical needs and its development in the earlier stages were due to men of the Egyptian, the Hindu and Semitic races."

"Whatever advance was made in Trigonometry during the thousand years after Ptolemy, was due to Hindus and Arabs."
—*Dr. Murray.*

"Hindu Trigonometry is meritorious but rests on arithmetic more than on geometry." —*Cajori–History of Mathematics.*

கோண கணிதத்தின் எளிய பகுதிகளின் உதவி கொண்டு, உயரமான பொருள்களின் உயரங்களையும், தொலைப்பொருள்களின் தொலைகளையும், குறிப்பிட்ட வடிவங்களின் பரப்பளவுகளையும் அளக்க இயலும். வான நூல், பௌதிக நூல் போன்ற பல பல துறைகளில் மலிந்து கிடக்கும் அறிவை அடைவதற்குக் கோண கணிதத்தின் அறிவு மிகவும் இன்றியமையாததாகும். இன்று கோண கணிதம் ஒரு பெரும் வளர்ச்சியைப் பெற்றிருக்கிறது. அதன் நுட்பங்களை அறிய உயர்தர கணிதப் படிப்பு அவசியமாகிக்கொண்டுவருகிறது. ஆனால் இச்சிறு நூல் கோண கணிதத்தின் எளிய பகுதிகளையே விளக்க முற்படுகின்றது.

2. கோணங்களை அளக்கும் முறைகள் (measurement of angles) :—இந்நூல் கோணங்களைப்பற்றிய நூல் ஆதலால் முதலில் கோணங்களை அளக்கும் முறைகளைப்பற்றிப் படிப்போம். கோணங்களை அளப்பதற்கு ஏதாவதொரு நிலைத்த அலகு (unit) இருத்தல் வேண்டும். முதலாவதாக நம் மனதில் தோன்றும் அலகு செங்கோணமெனினும், நடைமுறையில் அதைக்கொண்டு சிறிய கோணங்களை அளப்பதற்கு வசதியில்லாததால், வேறு சிறிய அளவுடைய அலகுகள் இருப்பது இன்றியமையாததாகும். தற்சமயம் இரண்டு முறைகள் நடப்பிலிருக்கின்றன. ஒன்று அறுபான் பகுப்பு முறை (sexagesional measure), மற்றொன்று நூற்றின் பகுப்பு முறை (centesimal measure). இம்முறை இரண்டிலும் கையாளும் அலகுகள், ஒரு செங்கோணத்தின் பகுதிகளாகும்.

3. அறுபான் பகுப்பு முறை :—இம்முறை முற்காலப் பேபிலோனியர்களால் (Babylonians)* வகுக்கப்பட்டது. தற்சமயம் உலகமெங்கும் இம்முறைதான் நடப்பிலிருக்கிறது. இந்த முறையில் ஒரு செங்கோணம் 90 சம பங்காக பிரிக்கப்பட்டிருக்கிறது. அவை ஒவ்வொன்றிற்கும் பாகை (degree) என்று பெயர். ஒரு பாகை 60 கலைகளாகவும் (minutes), ஒரு கலை 60 விகலைகளாகவும் (seconds) பிரிக்கப்பட்டிருக்கிறது. $1^\circ, 1', 1''$ என்ற குறிகளால் முறையே ஒரு பாகை, ஒரு கலை, ஒரு விகலை என்பவைகளைக் குறிப்பிடுவது மரபு.

---

* "Babylonian Science has made its impress upon modern civilization. Whenever a surveyor copies the readings from the graduated circle on his theodolite, whenever the modern man notes the time of day, he is, unconciously but unmistakably doing homage to the ancient astronomers on the banks of Eupharates." —*Cajori—History of Elementary Mathematics*,

ஆகவே 60 விகலைகள் (60″) கொண்டது ஒரு கலை (1′)

60 கலைகள் (60′) ,, ஒரு பாகை (1°)

90 பாகைகள் (90°) ,, ஒரு செங்கோணம்.

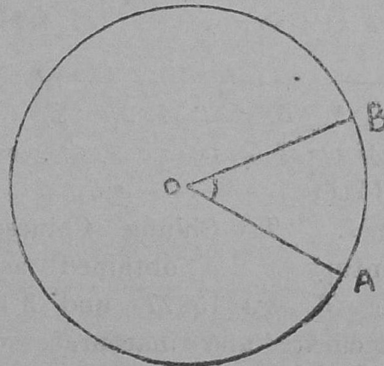
4. **நூற்றின் பகுப்பு முறை** :-இம்முறையில் ஒரு செங்கோணத்தை 100 கிரேடுகளாகவும் (grades), ஒரு கிரேடை 100 கலைகளாகவும், ஒரு கலையை 100 விகலைகளாகவும் பிரித்துள்ளனர். 1^g, 1′, 1″ என்ற அடையாளங்களால் கிரேடு, கலை, விகலை என்பவைகளைக் குறிப்பிடுவது வழக்கம்.

கணக்கீடுகளில் எப்பொழுதும் அறுபான் பகுப்பு முறையே கையாளப் படுகிறது. பிரான்சு புரட்சிக்காலத்தில் பிரான்சில் நூற்றின் பகுப்பு முறை வகுக்கப்பட்டது. ஆனால் அறுபான் பகுப்பு முறைப்படி அமைத்த வான நூல், மாலுமி நூல் முதலியவைகளுக்குப் பயன்படும் வாய்பாடுகளை மாற்றி அமைக்கவேண்டுமாதலால், பிரான்சில்கூட இம்முறையை நடப் புக்குக் கொண்டுவரவில்லை.

5. இம்முறைகள் இரண்டையும் தவிர உயர்தர கணிதத்தில் **வட்ட முறை அளவு (circular measure)** என்ற வேறொரு முறை பயன்படுத்தப்படுகிறது. இம்முறையில் மற்ற முறைகளைப்போல் ஒரு கோணத்தைச் செங்கோணத்தின் கீழ்மடங்காகவோ அல்லது மேல் மடங்காகவோ அளக்காமல், ஆரையன் (radian) என்ற கோணத்தை அலகாக வைத்து, அதன் மூலமாக கோணங்கள் அளக்கப்படுகின்றன.

6. **ஆரையன் வரையறை** :—ஒரு வட்டத்தில், அதன் ஆரையை (radius) நீளமாகக் கொண்ட வில் (arc) மையத்தில் உண்டுபண்ணும் கோணம் ஆரையனாகும்.

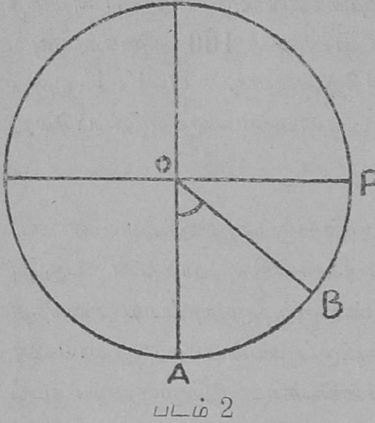
ஆரையை r என்று வைத்துக் கொள்வோம். இந்த வட்டத்தில் வட்ட வரையில் r நீளமுடைய AB என்ற வில்லை எடுத்து A, B-ஐ வட்டத்தின் மையமான O வோடு இணைத்தால், AOB என்ற கோணம் ஆரையனாகும்.



படம் 1

7. ஆரையன் ஒருநிலைக் கோணமாகும் (Constant angle) :—

எல்லா அளவு திட்டங்களிலும் அலகு நிலைத்ததாக இருத்தல் வேண்டும். ஆகவே ஆரையன் ஒரு நிலைக் கோணம் என்று நிறுவுவோம்.



படம் 2

AP ஐ கால் வட்டமென்றும், வில் AB ஐ r என்றும் வைத்துக் கொள்வோம். ஆகவே

$$AP = \frac{1}{4}(2\overset{*}{\pi} r) = \frac{\pi r}{2}.$$

ஒரு வட்டத்தின் மையத்திலுள்ள இரண்டு கோணங்களின் விகிதம் அவைகளை உண்டுபண்ணும் வட்ட வில்களின் விகிதத்திற்குச் சமமென்று வடிவ கணித நூலில் படித்திருக்கிறோம்.

ஆகவே $$\frac{\angle AOB}{\angle AOP} = \frac{\text{வில் } AB}{\text{வில் } AP} = \frac{r}{\frac{\pi r}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

$$\therefore \angle AOB = \frac{2}{\pi} \angle AOP$$

(அ-து) ஒரு ஆரையன் $= \dfrac{2}{\pi} \times$ ஒரு செங்கோணம்.

செங்கோணம் நிலைத்ததாக இருப்பதால், ஒரு ஆரையனும் நிலைத்ததாக இருக்கின்றது.

---

* π பெர்து அளவற்ற (incommensurable) எண்ணாகும். வழக்கமாகக் கொள்ளும் அதன் அண்ணளவுகள் (approximate values) 3·1416, $\frac{355}{133}$, $\frac{22}{7}$. ஆரியபட்டர் πக்கு கொடுத்த மதிப்பு 3·1416 ஆகும். "Tsu Ch'ung (Chinese mathematician) in the fifth century ....obtained as upper and lower limits for π 3·1415927 and 3·1415926 and from these the 'accurate' and 'inaccurate' values $\frac{355}{113}$, $\frac{22}{7}$."

—*Cajori-History of Mathematics*.

8. ஆரையனின் பருமன் (magnitude) அல்லது மதிப்பு.

$$\text{ஒரு ஆரையன்} = \frac{2}{\pi} \times \text{ஒரு செங்கோணம்.}$$

$$= \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{180^\circ}{3 \cdot 1416}$$

$$= 57^\circ - 17' - 44 \cdot 8'' \text{ (அண்ணளவாக)*}$$

ஆகவே $180^\circ = 2$ செங்கோணங்கள் $= \pi$ ஆரையன்கள்.

$360^\circ = 4$ செங்கோணங்கள் $= 2\pi$ ஆரையன்கள்.

ஆகையால் ஒரு சுற்றுங்கோடு ஒரு முழுச்சுற்று சுற்றினால் அது சுற்றின கோணம் 2π ஆரையனாகும். n சுற்றுகள் சுற்றினால் அது சுற்றின கோணம் $2n\pi$ ஆரையன்களாகும்.

பயிற்சி 1. வட்டளவு முறையில் 30°-ன் மதிப்பு என்ன?

$180^\circ = \pi$ ஆரையன்கள்.

$30^\circ = \frac{\pi}{6}$ ஆரையன்கள்.

சாதாரணமாக ஆரையன் என்ற சொல்லை விட்டுவிடுவது வழக்கம்.

ஆகவே $30^\circ = \frac{\pi}{6}$.

இவ்வாறே $45^\circ = \frac{\pi}{4}$; $60^\circ = \frac{\pi}{3}$.

பயிற்சி 2. $3\frac{\pi}{4}$-ன் மதிப்பு அறுபான் பகுப்பு முறையில் என்ன?

π ஆரையன்கள் $= 180^\circ$.

$\frac{3\pi}{4}$,, $= \frac{180^\circ}{\pi} \times \frac{3\pi}{4} = 135^\circ$.

பயிற்சிகள் 1

1. பின்வரும் கோணங்களின் வட்டவளவு காண்க.

$30^\circ, 80^\circ, 49^\circ, 120^\circ, 175^\circ, 75^\circ, 90^\circ, 15^\circ, 24^\circ, 22\frac{1}{2}^\circ$.

2. பின்வரும் கோணங்களின் மதிப்புகளை அறுபான் பகுப்பு முறையில் காண்க.

$\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{16}\pi, n\pi, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi$.

---

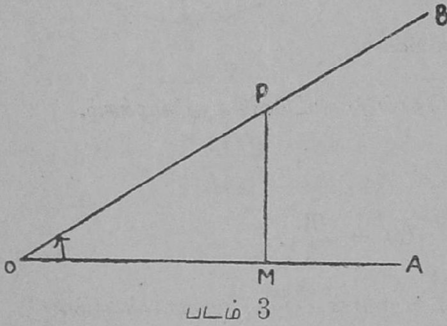
* "Hindus had tables of the half chords or sines and found that the arc equal in length to the radius contained 3438 *i.e.* $57^\circ - 18'$.
—*Dr. Murray.*

அதிகாரம் 2

குறுங்கோணத்தின் கோண கணிதத்தகவுகள்
(Trigonometrical ratios)

9. செங்கோண முக்கோணம், தனிக்கணித நூலிற்கு மட்டுமென்றி நில அளவு, பௌதிகம் முதலிய நூல்களுக்கும் அடிக்கடி பயன்படும். செங்கோண முக்கோணத்தினது மற்ற இரண்டு கோணங்களும் குறுங் கோணங்களாக இருப்பதால் அவற்றைப்பற்றி முதலில் படிப்போம்.

10. **குறுங்கோணத்தின் ஆறு வகையான கோண கணிதத் தகவுகள் :—A** என்ற கோணத்தின் OB சிறையில் (**arm**), P என்ற ஏதாவது ஒரு புள்ளி எடுத்து, அதிலிருந்து மற்ற **OA** சிறைக்கு **PM** குத்துக் கோடு (**perpendicular**) வரைக. அப்பொழுது **OMP** என்ற செங்கோண முக்கோணத்தின் பக்கங்களால் கிடைக்கும் ஆறு தகவுகள் பின் வருவன.



படம் 3

$$\frac{MP}{OP}, \frac{OM}{OP}, \frac{MP}{OM}, \frac{OM}{MP}, \frac{OP}{OM}, \frac{OP}{MP}.$$

இவைகள் **A** என்ற கோணத்தின் **கோண கணிதத்தகவுகள்** என கூறப் படுகின்றன.

$\frac{MP}{OP}$ என்பதை **A** என்ற கோணத்தின் நெடுக்கை (**sine**)* எனவும்

$\frac{OM}{OP}$,, ,, கிடக்கை (**cosine**) ,,

---

* Al-Battani's work De scientia stellarum was translated into Latin by Plato Tiburtinus in the twelfth century. Out of this translation sprang the word 'sinus' as the name of a trigonometrical function. The Arabic word for "sine" jiba was derived from the Sanskrit jiva." *Cajori—A History of Mathematics.* Page 105.

$\frac{MP}{OM}$ என்பதை A என்ற கோணத்தின் இருக்கை (tangent) எனவும்,

$\frac{OM}{MP}$,, ,, எதிரிருக்கை (cotangent) ,,

$\frac{OP}{OM}$,, ,, எதிர்கிடக்கை (secant) ,,

$\frac{OP}{MP}$,, ,, எதிர்நெடுக்கை (cosecant) ,,

வரையறுக்கப்படும்.

11. இந்த ஆறு தகவுகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதுவதும் சொல்வதும் மரபு.

	எழுதும் விதம்	சொல்லும் விதம்
∠ Aயின் நெடுக்கை	sin A	ஸையின் A
,, கிடக்கை	cos A	காஸ் A (கொஸயின் A)
,, இருக்கை	tan A	டேன் A (டேன்ஜன்ற் A)
,, எதிர் நெடுக்கை	cosec. A	கொஸீக்கென்ற் A
,, எதிர் கிடக்கை	sec. A	ஸீக்கென்ற் A
,, எதிரிருக்கை	cot A	காட் A (கோட்டேன்ஜன்ற் A)

எல்லாத் தகவுகளும் தனி எண்களாதலால், கோண கணிதத் தகவுகளும் தனி எண்களே.

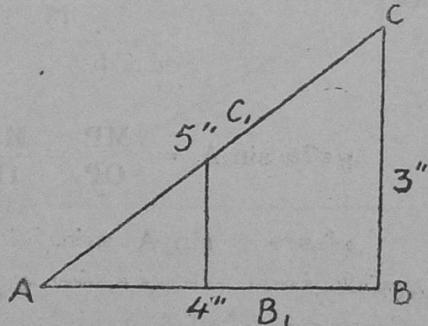
12. ABC முக்கோணத்தில் $\angle B = 90°$, $AB = 4''$, $BC = 3''$ என்று வைத்துக்கொண்டால்

$AC = 5''$.

ஆகவே, $\sin BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5}$

$\cos BAC = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$

$\tan BAC = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{4}$



படம் 4

B_1, C_1 புள்ளிகளை முறையே **AB, AC** பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகளாகக் கொள்வோம். அப்பொழுது $AB_1C_1 = 90°$, $AB_1 = 2''$, $AC_1 = 2{\cdot}5''$, $B_1C_1 = 1{\cdot}5''$. AB_1C_1 முக்கோணத்திலிருந்து

$$\sin B_1AC_1 = \frac{B_1C_1}{AC_1} = \frac{1{\cdot}5}{2{\cdot}5} = \frac{3}{5}$$

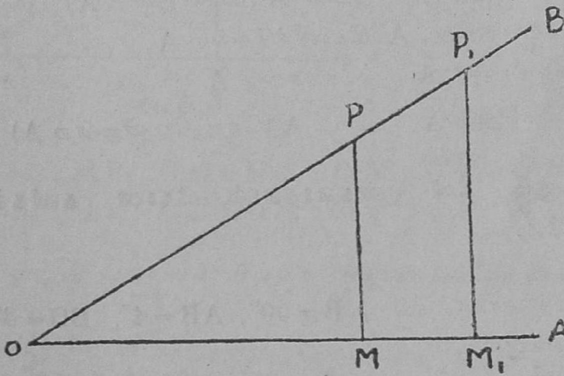
$$\cos B_1AC_1 = \frac{AB_1}{AC_1} = \frac{2}{2{\cdot}5} = \frac{4}{5}$$

$$\tan B_1AC_1 = \frac{B_1C_1}{AB_1} = \frac{1{\cdot}5}{2} = \frac{3}{4}$$

என அறிகிறோம்.

ஆகவே, இந்த இரண்டு முக்கோணங்களில் எந்த முக்கோணத்திலிருந்து கணக்கிட்டாலும், **A**யின் நெடுக்கை, கிடக்கை, இருக்கை முதலிய தகவுகளுக்கு அதே மதிப்புகள் கிடைக்கின்றன. ஆகையால் **கோண கணிதத் தகவுகள் கோணத்தின் அளவை மட்டுமே சார்ந்திருக்கின்றன.** இதை, பின் வருமாறும் நிறுவலாம்.

A என்ற கோணத்தின் **OB** சிறையில் **P, P_1** இரண்டு புள்ளிகளை எடுத்து அவற்றிலிருந்து மற்ற **O A** சிறைக்கு **PM, P_1M_1** இரண்டு குத்துக் கோடுகள் வரைக. அப்பொழுது **OMP, OM_1P_1** என்ற இரண்டு முக்கோணங்களும் வடிவொத்த (**similar**) செங்கோண முக்கோணங்களாகும்.



படம் 5

$$\text{ஆகவே } \sin A = \frac{MP}{OP} = \frac{M_1P_1}{OP_1}.$$

அஃதாவது **sin A** என்பதின் மதிப்பு, **MP** குத்துக்கோட்டின் இருப்பிடத்தைப் பொறுத்ததல்ல, ஆனல் அந்த கோணத்தின் உருவத்தை அஃதாவது பருமனைப் பொறுத்தே இருக்கிறது. சுருங்கக் கூறின், **ஒரு கோணத்தின் நெடுக்கை, கோணத்தின் ஒரு சார்பலனாகும் (function),**

இதைப்போல மற்றத் தகவுகளும் கோணத்தின் சார்பலனாக இருக்கக் காணலாம்.

13. * தகவுகளுக்கிடையிலுள்ள மாறுபட்ட தொடர்புகள் (Reciprocal relations) :– கோண கணிதத் தகவுகளை வரையறுத்ததிலிருந்து பின்வரும் தொடர்புகளைக் காணலாம்.

$$\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} \qquad \therefore \quad \sin A = \frac{1}{\operatorname{cosec} A}$$

$$\sec A = \frac{1}{\cos A} \qquad \therefore \quad \cos A = \frac{1}{\sec A}$$

$$\cot A = \frac{1}{\tan A} \qquad \therefore \quad \tan A = \frac{1}{\cot A}$$

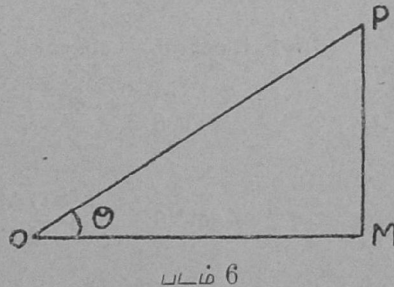
இத்தொடர்புகளை மாறுபட்ட தொடர்புகள் என்று கூறலாம்.

14. நாம் அடிக்கடி $(\sin A)^2$, $(\tan A)^4$, $(\cos A)^3$ என்பது போலுள்ள கோண கணிதத் தகவுகளின் தன் பெருக்கங்களைப் பயன் படுத்தவேண்டி வரும். இவைகளைச் சுருக்கமாக $\sin^2 A$, $\tan^4 A$, $\cos^3 A$ என எழுதுவது வழக்கம். எடுத்துக்காட்டாக $\cot^2 A = (\cot A)^2$; $\frac{\sin^n\theta}{\cos^n\theta} = \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^n$ ஆனால் $(\cos x)^{-1}$ஐ $\cos^{-1}x$ என்று எழுதக் கூடாது ; ஏனெனின் $\cos^{-1}x$ என்ற குறி, x-ஐ கிடக்கையாகக் கொண்ட கோணத்தைக் குறிக்கும். இம்மாதிரியே $\sin^{-1}x$, $\tan^{-1}x$.

15. கோண கணிதத் தகவுகளுக்கிடையிலுள்ள அடிப்படையான தொடர்புகள் (fundamental relations) :—

(1) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

OMP முக்கோணத்தில், M என்ற கோணத்தைச் செங்கோணமாகவும், MOPன் மதிப்பை θ என்றும் கொள்வோம்.



படம் 6

* தகவுகள் என்று இருப்பின் கோண கணிதத் தகவுகள் என்று கொள்க.

2

அப்பொழுது $\cos\theta = \frac{OM}{OP}$; $\sin\theta = \frac{MP}{OP}$.

$$\therefore \quad \sin^2\theta + \cos^2\theta = \left(\frac{MP}{OP}\right)^2 + \left(\frac{OM}{OP}\right)^2$$

$$= \frac{MP^2 + OM^2}{OP^2}$$

$$= \frac{OP^2}{OP^2} \text{ (பிதாகரசின் தேற்றம்)}$$

$$= 1$$

(2) **$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$.**

$$\tan\theta = \frac{MP}{OM}$$

$$\therefore \quad 1 + \tan^2\theta = 1 + \left(\frac{MP}{OM}\right)^2$$

$$= 1 + \frac{MP^2}{OM^2}$$

$$= \frac{OM^2 + MP^2}{OM^2}$$

$$= \frac{OP^2}{OM^2} = \sec^2\theta$$

(3) **$1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$.**

$$\cot\theta = \frac{OM}{MP}$$

$$\therefore \quad 1 + \cot^2\theta = 1 + \frac{OM^2}{MP^2}$$

$$= \frac{MP^2 + OM^2}{MP^2} = \frac{OP^2}{MP^2}$$

$$= \operatorname{cosec}^2\theta.$$

(4) $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$; $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$$\sin\theta = \frac{MP}{OP}; \quad \cos\theta = \frac{OM}{OP}$$

$$\therefore \quad \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{MP}{OP} \div \frac{OM}{OP} = \frac{MP}{OM} = \tan\theta.$$

ஆகவே, $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

இவ்வாறே, $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

பயிற்சி 1.

$\cos^4 A - \sin^4 A = 1 - 2\sin^2 A$ என்று நிறுவுக.

$$\begin{aligned}\cos^4 A - \sin^4 A &= (\cos^2 A + \sin^2 A)(\cos^2 A - \sin^2 A)\\ &= \cos^2 A - \sin^2 A\\ &= 1 - \sin^2 A - \sin^2 A\\ &= 1 - 2\sin^2 A.\end{aligned}$$

பயிற்சி 2.

$\sec^4 A - 1 = 2\tan^2 A + \tan^4 A$ என்று நிறுவுக.

$$\begin{aligned}\sec^4 A - 1 &= (\sec^2 A + 1)(\sec^2 A - 1)\\ &= (1 + \tan^2 A + 1)(1 + \tan^2 A - 1)\\ &= (2 + \tan^2 A)\tan^2 A\\ &= 2\tan^2 A + \tan^4 A.\end{aligned}$$

பயிற்சி 3.

$\cos A \sqrt{(1 + \cot^2 A)} = \sqrt{(\operatorname{cosec}^2 A - 1)}$ என்று நிறுவுக.

$$\begin{aligned}\cos A \sqrt{(1 + \cot^2 A)} &= \cos A \sqrt{(\operatorname{cosec}^2 A)}\\ &= \cos A \operatorname{cosec} A\\ &= \cot A\\ &= \sqrt{(\operatorname{cosec}^2 A - 1)}.\end{aligned}$$

பயிற்சி 4.

$\cos^2 A \tan^2 A \operatorname{cosec} A = \sin A$ என்று காட்டுக.

$$\cos^2 A \tan^2 A \operatorname{cosec} A = \cos^2 A . \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} . \frac{1}{\sin A} = \sin A.$$

பயிற்சி 5.

$a \cos^2\theta + b \sin^2\theta = c$ என்றிருந்தால் $\tan^2\theta = \dfrac{c-a}{b-c}$ என்று நிறுவுக.

$$a \cos^2\theta + b \sin^2\theta = c.$$

இரண்டு பக்கத்தையும் $\cos^2\theta$-ஆல் வகுத்தால்

$$a + b \tan^2\theta = c \sec^2\theta.$$

(அ-து) $a + b \tan^2\theta = c\,(1 + \tan^2\theta)$.

$$\therefore \quad \tan^2\theta\,(b - c) = c - a.$$

$$\therefore \quad \tan^2\theta = \frac{c-a}{b-c}.$$

பயிற்சிகள் 2.

கீழ்க்கொடுத்திருக்கும் முற்றொருமைகளை நிறுவுக.

1. $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta$.
2. $\sin^2\theta - \cos^2\theta = 1 - 2\cos^2\theta = 2\sin^2\theta - 1$.
3. $\sin^4\theta - \cos^4\theta = 1 - 2\cos^2\theta$.
4. $\sin^3 A - \cos^3 A = (\sin A - \cos A)(1 + \sin A \cos A)$.
5. $\sin^3 A + \cos^3 A = (\sin A + \cos A)(1 - \sin A \cos A)$
6. $\sin^4 B + \cos^4 B = 2\sin^4 B - 2\sin^2 B + 1$.
7. $(\sin A + \cos A)^2 + (\sin A - \cos A)^2 = 2$.
8. $\operatorname{cosec}^2 A - 1 = \cos^2 A \operatorname{cosec}^2 A$.
9. $(\sec\theta + \cos\theta)(\sec\theta - \cos\theta) = \tan^2\theta + \sin^2\theta$.
10. $\dfrac{1}{1 + \sin\theta} + \dfrac{1}{1 - \sin\theta} = 2\sec^2\theta$
11. $\dfrac{1}{\tan\theta + \cot\theta} = \sin\theta\cos\theta$.
12. $\dfrac{\sec\theta}{\cot\theta + \tan\theta} = \sin\theta$.
13. $\dfrac{\operatorname{cosec} B}{\cot B + \tan B} = \cos B$.
14. $\tan^2 A - \sin^2 A = \sin^4 A \sec^2 A$.
15. $\cos^6 x + \sin^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$.
16. $\sin^2 A \cos^2 B - \cos^2 A \sin^2 B = \sin^2 A - \sin^2 B$.

17. $\cos^2 A \cos^2 B - \sin^2 A \sin^2 B = \cos^2 A - \sin^2 B.$

18. $\operatorname{cosec}^4 B - \cot^4 B = \operatorname{cosec}^2 B + \cot^2 B.$

19. $\sec^2 A \tan^2 B - \tan^2 A \sec^2 B = \tan^2 B - \tan^2 A.$

20. $\cos^2 A \cos^2 B + \sin^2 A \sin^2 B + \sin^2 A \cos^2 B + \cos^2 A \sin^2 B = 1.$

பின் வரும் பயிற்சிகள் சிறிது கடினமானவை :—

பயிற்சி 6.

$x = a \cos\theta + b \sin\theta, \quad y = a \sin\theta - b \cos\theta$ என்றிருந்தால்
$x^2 + y^2 = a^2 + b^2$

என்று காட்டுக.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (a \cos\theta + b \sin\theta)^2 + (a \sin\theta - b \cos\theta)^2. \\ &= a^2 \cos^2\theta + 2\,ab \sin\theta \cos\theta + b^2 \sin^2\theta. \\ &\quad + a^2 \sin^2\theta - 2ab \sin\theta \cos\theta + b^2 \cos^2\theta. \\ &= a^2 (\cos^2\theta + \sin^2\theta) + b^2 (\sin^2\theta + \cos^2\theta) \\ &= a^2 + b^2. \end{aligned}$$

பயிற்சி 7.

$\tan^2 A - \tan^2 B = \dfrac{\cos^2 B - \cos^2 A}{\cos^2 B \cos^2 A}$ என்று நிறுவுக.

$$\begin{aligned} \tan^2 A - \tan^2 B &= \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} - \frac{\sin^2 B}{\cos^2 B} \\ &= \frac{\sin^2 A \cos^2 B - \sin^2 B \cos^2 A}{\cos^2 A \cos^2 B} \\ &= \frac{(1-\cos^2 A)\cos^2 B - (1-\cos^2 B)\cos^2 A}{\cos^2 A \cos^2 B} \\ &= \frac{\cos^2 B - \cos^2 A}{\cos^2 A \cos^2 B} \end{aligned}$$

பயிற்சி 8.

$(1 + \sin A + \cos A)^2 = 2\,(1 + \sin A)\,(1 + \cos A)$ என்று நிறுவுக.

$$\begin{aligned} (1 + \sin A + \cos A)^2 &= 1 + \sin^2 A + \cos^2 A + 2 \sin A + 2 \cos A \\ &\qquad + 2 \sin A \cos A. \\ &= 1 + 1 + 2 \sin A + 2 \cos A + 2 \sin A \cos A. \\ &= 2 + 2 \sin A + 2 \cos A + 2 \sin A \cos A. \\ &= 2\,(1 + \sin A) + 2 \cos A\,(1 + \sin A) \\ &= 2\,(1 + \sin A)\,(1 + \cos A). \end{aligned}$$

பயிற்சி 9.

$\cot\theta + \dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \operatorname{cosec}\theta$ என்று காட்டுக.

$$\cot\theta + \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta\,(1+\cos\theta)+\sin^2\theta}{\sin\theta\,(1+\cos\theta)}$$

$$= \frac{\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin\theta\,(1+\cos\theta)}$$

$$= \frac{\cos\theta+1}{\sin\theta\,(1+\cos\theta)}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta}$$

$$= \operatorname{cosec}\theta.$$

பயிற்சி 10.

$\dfrac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \dfrac{\cot\theta}{1-\tan\theta} = \sec\theta\operatorname{cosec}\theta + 1$ என்று காட்டுக.

$$\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \frac{\cot\theta}{1-\tan\theta} = \frac{\tan\theta}{1-\dfrac{1}{\tan\theta}} + \frac{\dfrac{1}{\tan\theta}}{1-\tan\theta}$$

$$= \frac{\tan^2\theta}{\tan\theta-1} + \frac{1}{\tan\theta\,(1-\tan\theta)}$$

$$= \frac{\tan^3\theta-1}{\tan\theta\,(\tan\theta-1)}$$

$$= \frac{(\tan\theta-1)\,(\tan^2\theta+\tan\theta+1)}{\tan\theta\,(\tan\theta-1)}$$

$$= \frac{\tan^2\theta+\tan\theta+1}{\tan\theta}$$

$$= \frac{\sec^2\theta+\tan\theta}{\tan\theta}$$

$$= \frac{\sec^2\theta}{\tan\theta}+1.$$

$$= \frac{\sec^2\theta}{\sin\theta}\cos\theta+1.$$

$$= \sec\theta\operatorname{cosec}\theta+1.$$

பயிற்சி 11.

$\sin^2 A \tan A + \cos^2 A \cot A + 2 \sin A \cos A = \tan A + \cot A$ என்று காட்டுக.

இடது பக்கம் $= \dfrac{\sin^2 A . \sin A}{\cos A} + \dfrac{\cos^2 A . \cos A}{\sin A} + 2 \sin A \cos A$

$$= \frac{\sin^3 A}{\cos A} + \frac{\cos^3 A}{\sin A} + 2 \sin A \cos A.$$

$$= \frac{\sin^4 A + \cos^4 A + 2 \sin^2 A \cos^2 A}{\sin A \cos A}.$$

$$= \frac{(\sin^2 A + \cos^2 A)^2}{\sin A \cos A}.$$

$$= \frac{1}{\sin A \cos A}.$$

வலது பக்கம் $= \tan A + \cot A.$

$$= \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\cos A \sin A}.$$

$$= \frac{1}{\sin A \cos A}.$$

ஆகவே இரண்டு பக்கங்களும் சமம்.

பயிற்சி 12.

$\sqrt{\dfrac{1 - \cos A}{1 + \cos A}} = \operatorname{cosec} A - \cot A$ என்று நிறுவுக.

$$\sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}} = \frac{\sqrt{1 - \cos A}\ \sqrt{1 - \cos A}}{\sqrt{1 + \cos A}\ \sqrt{1 - \cos A}} = \frac{1 - \cos A}{\sqrt{1 - \cos^2 A}}$$

$$= \frac{1 - \cos A}{\sin A} = \operatorname{cosec} A - \cot A.$$

பயிற்சிகள் 3

கீழ்க் கொடுத்துள்ளவைகளை நிறுவுக.

1. $\sec\theta - \tan\theta \sin\theta = \cos\theta.$
2. $(\sin A + \cos A)(\cot A + \tan A) = \sec A + \operatorname{cosec} A.$

3. $(\sec\theta + \operatorname{cosec}\theta)(\sin\theta + \cos\theta) = \sec\theta \operatorname{cosec}\theta + 2.$

4. $(\cos\theta + \sin\theta)^4 - (\cos\theta - \sin\theta)^4 = 8\cos\theta\sin\theta.$

5. $(\tan\theta + \sec\theta)^2 = \dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}.$

6. $\dfrac{\sec A - \tan A}{\sec A + \tan A} = 1 - 2\sec A\tan A + 2\tan^2 A.$

7. $\dfrac{\tan A}{\sec A - 1} + \dfrac{\tan A}{\sec A + 1} = 2\operatorname{cosec} A.$

8. $\dfrac{\cos A}{1-\tan A} + \dfrac{\sin A}{1-\cot A} = \sin A + \cos A.$

9. $\dfrac{1+\cos A}{\sec A - \tan A} - \dfrac{1-\cos A}{\sec A + \tan A} = 2(1+\tan A).$

10. $\dfrac{\sin A}{\cos A} + \dfrac{\tan A}{\cot A} = \dfrac{\sin^2 A\,(1+\cot A)}{\cos^2 A}$

11. $(1+\sin\theta-\cos\theta)^2 + (1-\sin\theta+\cos\theta)^2 = 4(1-\sin\theta\cos\theta).$

12. $\cot\alpha\tan\beta\,(\tan\alpha+\cot\beta) = \cot\alpha + \tan\beta.$

13. $\dfrac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} + \dfrac{\cos A - \cos B}{\sin A - \sin B} = 0.$

14. $\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sec\theta} - \dfrac{1+\sin\theta}{1-\sec\theta} = 2\cos\theta\,(\cot\theta + \operatorname{cosec}^2\theta).$

15. $\sqrt{\sec^2 A + \operatorname{cosec}^2 A} = \tan A + \cot A.$

16. $\sqrt{\dfrac{1-\sin A}{1+\sin A}} = \sec A - \tan A.$

17. $\sqrt{\dfrac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A.$

18. $\dfrac{\tan A - \sec A + 1}{\tan A + \sec A - 1} = \dfrac{\cos A}{1+\sin A}$

19. $(1+\sec\theta+\tan\theta)(1+\cot\theta-\operatorname{cosec}\theta) = 2.$

20. $(\tan\theta+\sec\theta+1)(\tan\theta-\sec\theta+1) = 2\tan\theta.$

21. $(\tan\theta+\sec\theta-1)(\sec\theta-\tan\theta+1) = 2\tan\theta.$

22. $(1+\cot A+\tan A)(\sin A-\cos A) = \dfrac{\sec A}{\operatorname{cosec}^2 A} - \dfrac{\operatorname{cosec} A}{\sec^2 A}$

23. $\dfrac{\sec A + \tan A}{\sec A - \tan A} + \dfrac{\sec A - \tan A}{\sec A + \tan A} = 4\sec^2 A - 2.$

24. $\cot^2\theta \dfrac{\sec\theta - 1}{1+\sin\theta} + \sec^2\theta . \dfrac{\sin\theta - 1}{1+\sec\theta} = 0$

25. $\dfrac{\tan\alpha + \cot\beta}{\cot\alpha + \tan\beta} = \dfrac{\tan\alpha}{\tan\beta}$

26. $\dfrac{\tan\alpha - \cot\beta}{\cot\alpha - \tan\beta} = -\dfrac{\cot\beta}{\cot\alpha}$

27. $\sqrt{\dfrac{1+\tan^2\theta}{1+\cot^2\theta}} = \dfrac{\tan\theta - 1}{1-\cot\theta}$

28. $(\tan\theta - \cot\theta)(\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta)(\sec\theta - \cos\theta)$
$= \sin^2\theta - \cos^2\theta$

29. $\sin\theta(\cot\theta + 2)(2\cot\theta + 1) = 2\operatorname{cosec}\theta + 5\cos\theta.$

30. $\cos\theta(\tan\theta + 3)(3\tan\theta + 1) = 3\sec\theta + 10\sin\theta.$

31. $\dfrac{1+\sin A - \cos A}{1+\sin A + \cos A} + \dfrac{1+\sin A + \cos A}{1+\sin A - \cos A} = 2\operatorname{cosec} A.$

32. $\dfrac{1+\operatorname{cosec} A + \cot A}{1+\operatorname{cosec} A - \cot A} = \dfrac{\operatorname{cosec} A + \cot A - 1}{\cot A - \operatorname{cosec} A + 1}$

33. $\sin^2\theta \tan\theta + \cos^2\theta \cot\theta + 2\sin\theta\cos\theta = \tan\theta + \cot\theta.$

34. $2(\sin^6\theta + \cos^6\theta) - 3(\sin^4\theta + \cos^4\theta) + 1 = 0.$

35. $\sin\theta(1+\tan\theta) + \cos\theta(1+\cot\theta) = \sec\theta + \operatorname{cosec}\theta.$

36. $\dfrac{(\sin\theta + \cos\theta)^2}{\sin\theta\cos\theta} = (1+\tan\theta)(1+\cot\theta).$

37. $(\sec\theta + \operatorname{cosec}\theta)^2 = (1+\tan\theta)^2 + (1+\cot\theta)^2.$

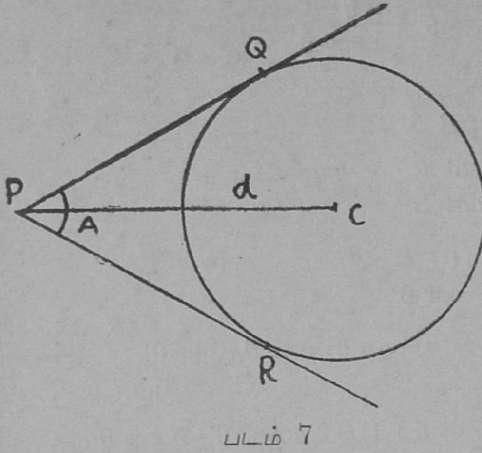
38. $a\cos\theta + b\sin\theta = c = b\cos\theta - a\sin\theta$ எனின்,
$a^2 + b^2 = 2c^2$ என்று நிறுவுக.

39. $x = a\cos^3\theta,\ y = b\sin^3\theta$ எனின், $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\dfrac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$
என்று காட்டுக.

40. $\sin\theta + \cos\theta = x$ என்றும், $\sin^3\theta + \cos^3\theta = y$ என்றுமிருந்தால்
$x^3 - 3x + 2y = 0$ என்று நிறுவுக.

41. $(1+\sin A)(1+\sin B)(1+\sin C) = (1-\sin A)(1-\sin B)$
$(1-\sin C)$ என்றால், ஒவ்வொரு பக்கத்தின் மதிப்பும்
$\cos A\cos B\cos C$ என்று காட்டுக.

42. $x = r\cos\theta\cos\Phi,\ y = r\cos\theta\sin\Phi,\ z = r\sin\theta$ என்றால்,
$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ என்று காட்டுக.



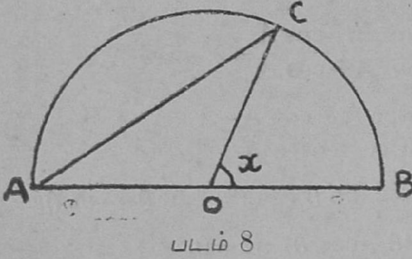
படம் 7

43. **QPR = A, PC =** d.

வட்டத்தின் விட்டம்

$$= 2d \ \sin \frac{A}{2}$$

என்று நிறுவுக.

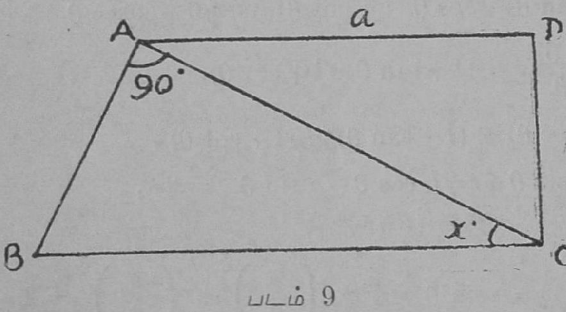


படம் 8

44. அரைவட்டத்தின் மையம் O. அதன் ஆரை a.

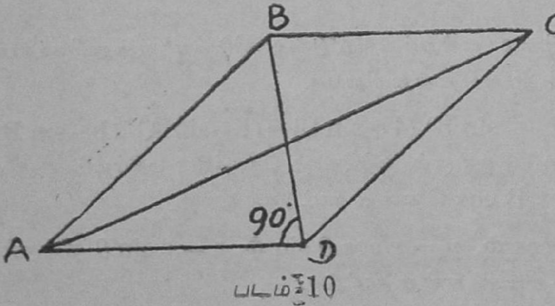
$$AC = 2a \cos \frac{x}{2}$$

என்று நிறுவுக.



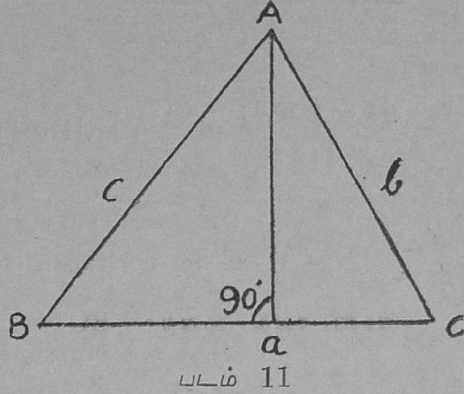
படம் 9

45. **AD, BC** ஒரு போகுக் கோடுகளாகும். **BC**யின் நீளம் $= \dfrac{a}{\cos^2 x}$ என்று நிறுவுக.



படம் 10

46. **ABCD** ஒரு போகு நாற்சிறையாகும் (**parallelogram**). அதன் பரப்பு $= a^2 \sin A \cos A$ என்று காட்டுக.



படம் 11

47. $AD = c \sin B$ என்றும், ABC என்ற முக்கோணத்தின் பரப்பு $= \frac{1}{2} c a \sin B$ என்றும் நிறுவுக.

48. முந்தின பயிற்சிக்குரிய படத்திலிருந்து $a = c \cos B + b \cos C$ என்று காட்டுக.

49. a ஆரையுடைய ஒரு வட்டம், ஒரு சமதள n கோணத்தின் (**regular polygon of n sides**) முனைகள் வழியாகச் செல்லுமானால் n கோணத்தின் பரப்பு $= na^2 \sin\frac{\pi}{n} \cos\frac{\pi}{n}$ என்று காட்டுக.

50. ஒரு சமதள n கோணத்தின் பக்கங்கள் r ஆரையுடைய வட்டத்தைத் தொடுகின்றன. அதன் சுற்றளவு $2nr \tan\frac{\pi}{n}$ என்று காட்டுக.

16. இவ்வதிகாரத்தில் நாம் நிறுவின தொடர்புகளைக் கொண்டு, எல்லாக் கோண கணிதத் தகவுகளையும் ஒரே தகவின் சார்பலனாகக் கூறிவிடலாம்.

பயிற்சி 13 :— $\angle A$யின் கோண கணிதத் தகவுகளை $\cot A$யின் சார்பலனாகக் கூறுக.

$$\tan A = \frac{1}{\cot A}$$

$$\operatorname{cosec} A = \sqrt{1+\cot^2 A}$$

$$\sin A = \frac{1}{\operatorname{cosec} A} = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 A}}$$

$$\cos A = \cot A \sin A = \frac{\cot A}{\sqrt{1+\cot^2 A}}$$

$$\sec A = \frac{\sqrt{1+\cot^2 A}}{\cot A}$$

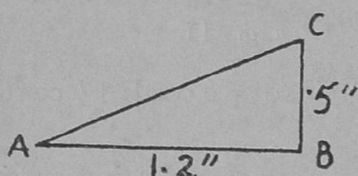
பயிற்சி 14:— $\tan A = \frac{5}{12}$ என்றிருந்தால், $\sin A$, $\cos A$ என்பனவற்றின் மதிப்புகள் என்ன?

முதல் முறை:—$\cos A = \frac{1}{\sqrt{(1+\tan^2 A)}} = \frac{1}{\sqrt{(1+\frac{25}{144})}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{169}{144}}} = \frac{12}{13}.$$

$$\sin A = \tan A \cos A = \frac{5}{12} \times \frac{12}{13} = \frac{5}{13}.$$

இரண்டாவது முறை:—$BC = \cdot 5''$, $AB = 1\cdot 2''$ என்றிருக்கும் செங்கோண முக்கோணம் வரைக.



படம் 12

$$\therefore \quad AC = \sqrt{\cdot 5^2 + 1\cdot 2^2} = 1\cdot 3.$$

ஆகவே A-யின் இருக்கை $\frac{5}{12}$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{\cdot 5}{1\cdot 5} = \frac{5}{13}.$$

$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{1\cdot 2}{1\cdot 3} = \frac{12}{13}.$$

பயிற்சிகள் 4

1. $\cos\theta = \frac{3}{5}$ என்றால் மற்ற தகவுகளின் மதிப்பு என்ன?
2. $\sin\theta = \frac{1}{3}$ என்றால் மற்ற தகவுகளின் மதிப்பு என்ன?
3. $\sin A = \frac{1}{2}$ என்றால் $\sec A$, $\cot A$ என்பனவற்றின் மதிப்பைக் காண்க.
4. $\sec\theta = 4$ என்றால் $\cot\theta$, $\sin\theta$ என்பனவற்றின் மதிப்பைக் காண்க.
5. $\sin A = \frac{m}{n}$ என்றால், $\sqrt{n^2 - m^2}\tan A = m$ என்று நிறுவுக.
6. $\tan A = \frac{2pq}{p^2 - q^2}$ என்றால் $\cos A$, $\operatorname{cosec} A$ என்பனவற்றின் மதிப்பு என்ன?

7. $\sec A = \frac{13}{5}$ என்றால் $\frac{2 \sin A - 3 \cos A}{4 \sin A - 9 \cos A}$ என்பதின் மதிப்பைக் காண்க.

8. $\cot \theta = \frac{p}{q}$ என்றால், $\frac{p \cos \theta - q \sin \theta}{p \cos \theta + q \sin \theta}$ ன் மதிப்பு என்ன ?

9. $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{7}}$ என்றால் $\frac{\operatorname{cosec}^2\theta - \sec^2\theta}{\operatorname{cosec}^2\theta + \sec^2\theta}$ ன் மதிப்பு என்ன ?

10. $\tan C = \frac{a}{b}$ என்றால் $\frac{a \sin C - b \cos C}{a \sin C + b \cos C}$ ன் மதிப்பு என்ன ?

11. $\tan A + \cot A = 4$ என்றிருந்தால் $\tan^2 A + \cot^2 A = 14$ என்று நிறுவுக.

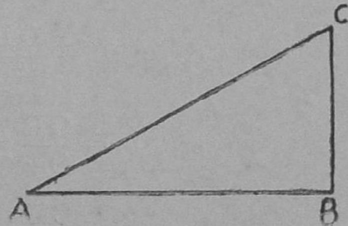
12. $\cos A + \sec A = 3$ என்றிருந்தால் $\cos^3 A + \sec^3 A = 18$ என்று காட்டுக.

17. கோண கணிதத் தகவுகளுடைய மதிப்புகளின் எல்லைகள் :— $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ என்று இவ்வதிகாரத்தில் 15-வது தொகுதியில் நிறுவினோம். $\sin^2 A$, $\cos^2 A$ என்பவை இருபடிகளாக இருப்பதால் அவை மிகைக்கணியங்களாகவே (positive quantities) இருக்கின்றன. அவற்றின் கூட்டல் தொகை ஒன்றாக இருப்பதால் அவை ஒவ்வொன்றும் ஒன்றாகவோ அல்லது ஒன்றைவிடக் குறைவாகவோ இருத்தல் வேண்டும். (அ-து) $\sin^2 A < 1$ அல்லது $\sin^2 A = 1$. ஆகவே $\sin A$-ன் மதிப்பு ஒன்றைவிடக் கூடுதலாக இருக்காது. எனவே, $\operatorname{cosec} \theta$, $\sec \theta$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகள், ஒன்றைவிடக் குறைந்திருக்க முடியாது என்று அறிகிறோம்.

18. தகவுகளுடைய ஒப்புப்பருப்பங்கள் (Relative magnitudes) :—

$$\sin A = \frac{BC}{AC}.$$

$$\tan A = \frac{BC}{AB}.$$



படம் 13

ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில், செங்கோண எதிர் சிறை (**hypotenuse**) மற்ற பக்கங்களைவிட நீளம் கூடுதலாக இருப்பதால்

$$\frac{BC}{AC} < \frac{BC}{AB}. \quad \therefore \quad \sin A < \tan A.$$

$$\sec A = \frac{AC}{AB}. \text{ ஆனால் } \frac{BC}{AB} < \frac{AC}{AB}.$$

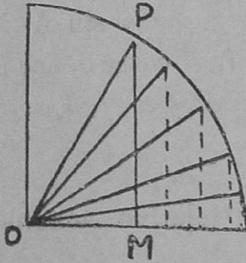
$$\therefore \quad \tan A < \text{Sec } A.$$

$$\therefore \quad \sin A < \tan A < \sec A.$$

இதே மாதிரி $\cos A < \cot A < \operatorname{cosec} A$ என்று நிறுவலாம்.

அடிக்கடிப் பயன்படும் சில கோண கணிதத் தகவுகளின் மதிப்புகள்.

19. 0°-ன் தகவுகள் :—OMP என்ற செங்கோண முக்கோணம் வரைந்து, அதில் MOP கோணத்தை θ என்று கொள்வோம். OP-யின் நீளத்தை மாற்றாமல் MOP-ஐ சிறிது சிறிதாக ஆக்கினல், MP-யின் நீளமும் குறைந்துகொண்டே வரும். அதாவது θ சுன்னத்தை (**zero**) அணுகி வரவர, MP சுன்னத்தை அணுகி வருகிறது. θ-வின் மதிப்பு சுன்னமாக இருக்கும்பொழுது $MP = 0$; $OM = OP$.



படம் 14

$$\sin 0^\circ = \frac{MP}{OP} = \frac{0}{OP} = 0.$$

$$\cos 0^\circ = \frac{OM}{OP} = \frac{OP}{OP} = 1.$$

$$\tan 0^\circ = \frac{MP}{OM} = \frac{0}{OP} = 0.$$

$$\operatorname{cosec} 0^\circ = \frac{OP}{MP} = \frac{OP}{0} = \infty \text{ (எல்லையற்ற எண்).}$$

$$\sec 0^\circ = \frac{OP}{OM} = \frac{OP}{OP} = 1.$$

$$\cot 0^\circ = \frac{OM}{MP} = \frac{OP}{0} = \infty.$$

20. 90°-ன் தகவுகள் :—MOP, 90°-ஐ அணுகும்பொழுது, **OM** சுன்னத்தை அணுகுகிறது; **MP, OP**-ஐ அணுகுகிறது. கடைசியாக **MOP = 90°** ஆக இருக்கும்பொழுது **O M = 0 ; M P = O P.**

$$\sin 90° = \frac{MP}{OP} = \frac{OP}{OP} = 1.$$

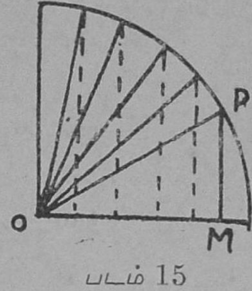
$$\cos 90° = \frac{OM}{OP} = \frac{0}{OP} = 0.$$

$$\tan 90° = \frac{MP}{OM} = \frac{OP}{0} = \infty.$$

$$\text{cosec.} 90° = \frac{OP}{MP} = \frac{OP}{OP} = 1.$$

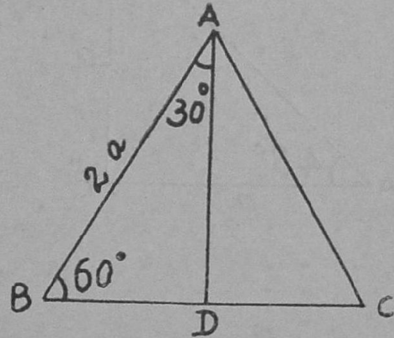
$$\sec 90° = \frac{OP}{OM} = \frac{OP}{0} = \infty.$$

$$\cot 90° = \frac{OM}{MP} = \frac{0}{OP} = 0.$$



படம் 15

21. 60°, 30° என்பவைகளின் தகவுகள் :—ஒவ்வொரு பக்கமும் $2a$ நீளமுடைய **ABC** என்ற ஒரு சம பக்க முக்கோணம் **(equilateral triangle)** வரைந்து, **A**-லிருந்து **BC**-க்கு **AD** குத்துக்கோடு வரைக. இந்தக் கோடு **BC**-ஐ சம பங்காகவும், **BAC**-ஐ சம பங்காகவும் பிரிக்கும். **ABC** சம பக்க முக்கோணமாதலால் **ABD** = 60°, **BAC** = 60°.



படம் 16

$$\therefore \quad BAD = 30° ; \quad BDA = 90°.$$

மேலும் $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2}$

$$= \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3}.\ a$$

ஆகவே $\sin 60^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *

$\cos 60^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$

$\tan 60^\circ = \frac{AD}{BD} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$

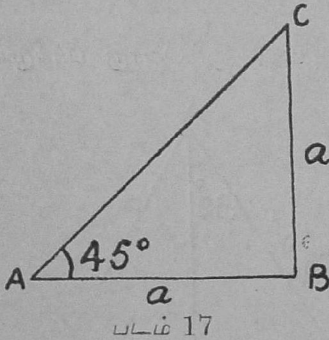
$\sin 30^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$ ÷

$\cos 30^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 30^\circ = \frac{BD}{AD} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

மேற் கண்ட தகவுகளிலிருந்து **cosec 30°, sec 30°, cot 30°, cosec 60°, sec 60°, cot 60°**-ன் மதிப்புகளையும் எளிதிற் காணலாம்.

22. 45°ன் தகவுகள் :—AB = BC = *a* என்றிருக்கும்படியான ஒரு செங்கோண முக்கோணம் வரைக.



படம் 17

$\therefore \quad BAC = ACB = 45°$

மேலும்

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}.$

$\sin 45^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

$\cos 45^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

$\tan 45^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a} = 1.$

$\therefore \quad \operatorname{cosec} 45^\circ = \sqrt{2}.$

$\sec 45^\circ = \sqrt{2}.$

$\cot 45^\circ = 1.$

---

* ÷ "Interesting passages are found in Varāha Mihira's Pancha Siddhantika of the sixth century A. D. which, in our notation for unit radius gives. . . . $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\sin 60^\circ = \sqrt{1-\frac{1}{4}}$."

Cajori—History of Mathematics. page 96

பயிற்சி 15. $\sin^2 30^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 60^\circ$ ன் மதிப்பு என்ன?

$$\sin^2 30^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 60^\circ = (\tfrac{1}{2})^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{4}.$$

$$= \tfrac{3}{2}.$$

பயிற்சி 16. $\left(\frac{1+\cot 60^\circ}{1-\cot 60^\circ}\right)^2 = \frac{1+\cos 30^\circ}{1-\cos 30^\circ}$ என்று நிறுவுக.

$$\left(\frac{1+\cot 60^\circ}{1-\cot 60^\circ}\right)^2 = \frac{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)^2} = \frac{4+2\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

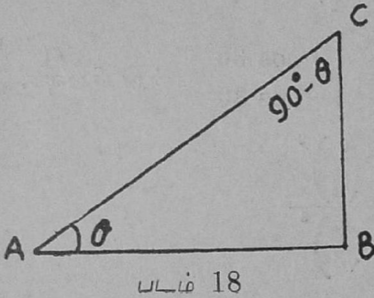
$$= \frac{1+\cos 30^\circ}{1-\cos 30^\circ}$$

பயிற்சிகள் 5

கீழ்க் கொடுத்துள்ளவைகளின் மதிப்புகளைக் காண்க :—

1. $\tan^2 30^\circ + \tan^2 45^\circ + \tan^2 60^\circ$.
2. $\sin 30^\circ \cos 60^\circ + \cos 30^\circ \sin 60^\circ$.
3. $\cos 30^\circ \cos 60^\circ - \sin 30^\circ \sin 60^\circ$.
4. $\cos 45^\circ \cos 60^\circ - \sin 45^\circ \sin 60^\circ$.
5. $\tan^2 60^\circ + 2 \tan^2 45^\circ$.
6. $\tan^3 45^\circ + 4 \cos^3 60^\circ$.
7. $\cot 60^\circ \tan 30^\circ + \sec^2 45^\circ \sin 90^\circ$.
8. $\tan^2 60^\circ + 4 \cot^2 45^\circ + 3 \sec^2 30^\circ + \cos^2 90^\circ$.
9. $\tan^2 30^\circ + 2 \sin 60^\circ + \tan 45^\circ - \tan 60^\circ + \cos^2 30^\circ$.
10. $\frac{1}{2} \sin^2 60^\circ - \frac{1}{2} \sec 60^\circ \tan^2 30^\circ + \frac{4}{3} \sin^2 45^\circ \tan^2 60^\circ$,

23. நிரப்பும் கோணங்களின் (complementary angles) தகவுகள் :— $\angle B$ ஒரு செங்கோணமாக இருக்கும்படி **ABC** செங்கோண முக்கோணம் வரைக. அப்பொழுது **A, C** கோணங்கள் நிரப்பும் கோணங்களாகும். $\angle A$-ஐ θ-ஆகக்கொண்டால் $\angle C = 90^\circ - \theta$.



படம் 18

$$\text{Sin}\,(90^\circ-\theta)=\sin ACB=\frac{AB}{AC}$$
$$=\cos BAC=\cos\theta.$$
$$\cos\,(90^\circ-\theta)=\cos ACB=\frac{BC}{AC}$$
$$=\sin BAC=\text{Sin}\,\theta.$$
$$\tan\,(90^\circ-\theta)=\tan ACB=\frac{AB}{BC}$$
$$=\cot BAC=\cot\theta.$$

இவ்வாறே $\text{cosec}\,(90^\circ-\theta)=\sec\theta.$

$\sec\,(90^\circ-\theta)=\text{cosec}\,\theta.$

$\cot\,(90^\circ-\theta)=\tan\theta.$

ஆகையால் ஒரு கோணத்தின் நெடுக்கை அக்கோணத்தினுடைய நிரப்பின் கிடக்கையாகும். இவ்வாறே ஒரு கோணத்தின் கிடக்கை, இருக்கை முதலியவைகள் முறையே அந்தக் கோணத்தினது நிரப்பின் நெடுக்கை, எதிரிருக்கை முதலியவைகளாகும்.

பயிற்சி 17.

$$\tan A+\tan\,(90^\circ-A)=\text{cosec}\,(90^\circ-A)\,\text{cosec}\,A$$

என்று நிறுவுக.

$$\tan A+\tan\,(90^\circ-A)=\tan A+\cot A.$$
$$=\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\cos A}{\sin A}.$$
$$=\frac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\sin A\cos A}.$$
$$=\frac{1}{\sin A\cos A}.$$
$$=\frac{1}{\sin A.\ \sin\,(90^\circ-A)}.$$
$$=\text{cosec}\,A.\ \text{cosec}\,(90^\circ-A).$$

பயிற்சிகள் 6

கீழ்க் கொடுத்திருக்கும் முற்றொருமைகளை நிறுவுக :—

1. $\sin (90^\circ - A) \sec (90^\circ - A) = \cot A.$

2. $\sin A \tan (90^\circ - A) \operatorname{cosec} (90^\circ - A) = 1.$

3. $\sec (90^\circ - A) \sin A \cot A \cot (90^\circ - A) = 1.$

4. $\dfrac{\sin (90^\circ - \theta)}{\sec (90^\circ - \theta)} \cdot \dfrac{\tan (90^\circ - \theta)}{\cos \theta} = \cos \theta.$

5. $\dfrac{\cot^2\theta - \sin^2 (90^\circ - \theta)}{\cot \theta + \cos \theta} = \tan (90^\circ - \theta) - \cos \theta.$

6. $\operatorname{cosec}^2 A - \cos A \sin (90^\circ - A) = \tan (90^\circ - A) + \sin^2 A.$

7. $\dfrac{\sec (90^\circ - \theta) \sin (90^\circ - \theta)}{\cos \theta \tan (90^\circ - \theta)} = \sec \theta.$

8. $\dfrac{\sec^2 A \cot^2 A \tan A}{\tan (90^\circ - A) \operatorname{cosec} A \sec (90^\circ - A)} = \cot^2 (90^\circ - A).$

9. $\dfrac{\sin A \cos (90^\circ - A) + \cos A \sin (90^\circ - A)}{\operatorname{cosec}^2 (90^\circ - \theta) - \cot^2 (90^\circ - \theta)} = 1.$

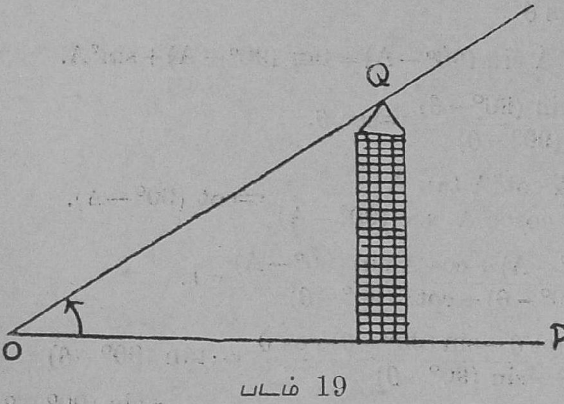
10. $\dfrac{\tan (90^\circ - \theta) \cot \theta - \sin (90^\circ - \theta) \cos \theta}{\cot \theta + \sin (90^\circ - \theta)} = \tan (90^\circ - \theta)$
$- \sin (90^\circ - \theta).$

அதிகாரம் 3

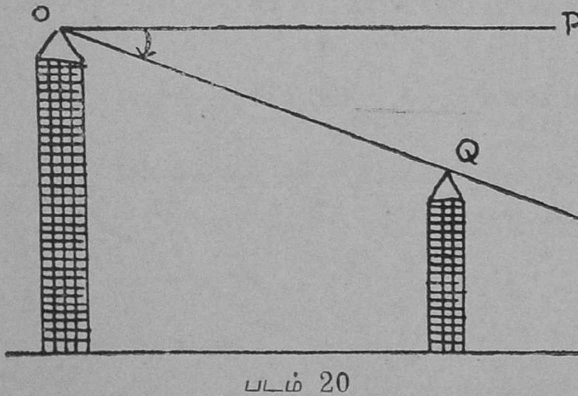
உயரங்களும் தொலைகளும் (heights and distances)

24. அளக்க இயலும் சில தொலைகளையும் கோணங்களையும் கொண்டு அளக்க இயலாத தொலைகளையும் உயரங்களையும் கணக்கிடுவது, கோண கணிதத்தின் ஒரு நோக்கமாகும். அவ்விதமான சில சுலபமான கணக்குகளை இவ்வதிகாரத்தில் ஆராய்வோம்.

25. ஏற்றக்கோணமும் இறக்கக்கோணமும் :—Q என்ற பொருள் இருக்கும் செங்குத்துத் தளத்தில் **(vertical plane), O P** என்னும் படுக்கைக்கோடு **(horizontal line)** இருப்பதாகக் கொள்வோம். படுக்கைக் கோட்டின் மேலாக **Q** காணப்படுமானல் **POQ** என்ற கோணத்தை **Q**-வினது ஏற்றக் கோணம் **(angle of elevation)** என்றும், படுக்கைக் கோட்டின் கீழாக **Q** காணப்படுமானல் **POQ** என்ற கோணம் **O**-விருந்து **Q**-வினது இறக்கக் கோணம் **(angle of depression)** என்றும் கூறப் படும்.

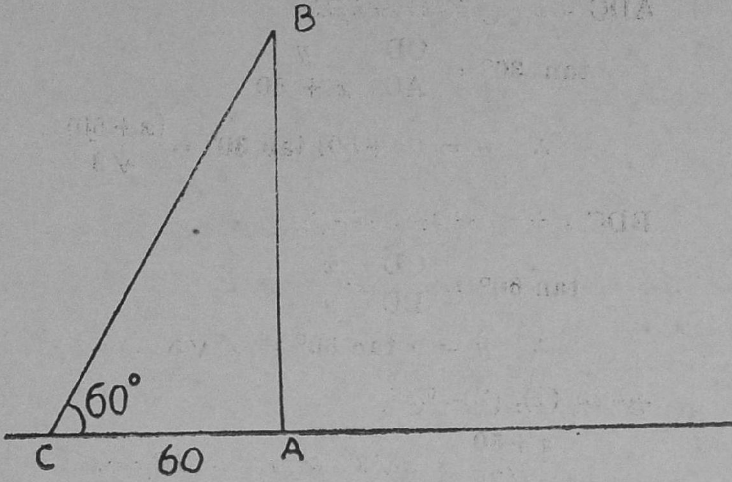


படம் 19



படம் 20

பயிற்சி 1. மட்டமான தளத்தில் (**horizontal plane**) ஓர் இடத்தினின்றும் 60 அடிக்கு அப்பால் நிற்கும் கொடி மரத்தின் உச்சியின் ஏற்றக்கோணம் 60° ஆனல் கொடிமரத்தின் உயரம் என்ன ?



படம் 21

அப்பொழுது $\tan 60^\circ = \frac{AB}{CA}$

அ-து $AB = CA \tan 60^\circ$

$= 60 \times \sqrt{3}$

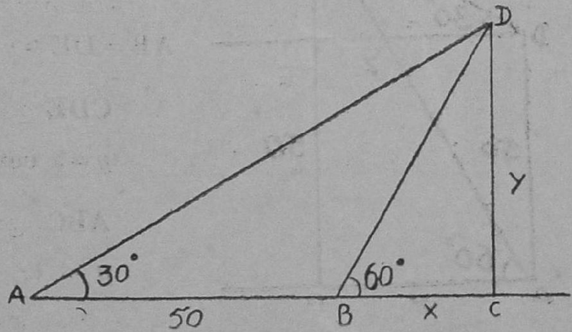
$= 60 \times 1{\cdot}732$

$= 103{\cdot}92$

ஆகவே அதன் உயரம் = 103·92 அடி.

பயிற்சி 2. ஓர் ஆற்றின் எதிர்க்கரையில் நிற்கும் மரத்தின் ஏற்றக் கோணம் 60° ஆகக் காணும் ஒருவன் தன் பின் நோக்கி 50 அடி சென்றால் அம்மரத்தின் ஏற்றக் கோணம் 30° ஆக மாறுவதைக் காணுவான். அப்படியானால் அவ்வாற்றின் அகலம் என்ன?

CD என்பதை மரமாகவும், அதன் உயரம் y ஆகவும், **A, B** ஆகிய இரண்டையும் அவன் நின்று பார்க்கும் இடங்களாகவும், ஆற்றின் அகலம் x ஆகவும் வைத்துக்கொள்வோம்.



படம் 22.

ADC என்ற முக்கோணத்தில்

$$\tan 30^\circ = \frac{CD}{AC} = \frac{y}{x+50}$$

$$\therefore \quad y = (x+50)\tan 30^\circ = \frac{(x+50)}{\sqrt{3}} \qquad (1)$$

BDC என்ற முக்கோணத்தில்

$$\tan 60^\circ = \frac{CD}{BC} = \frac{x}{y}$$

$$\therefore \quad y = x \tan 60^\circ = x\sqrt{3} \qquad (2)$$

ஆகவே (1), (2)-லிருந்து

$\frac{x+50}{\sqrt{3}} = x\sqrt{3}$ என்று கிடைக்கிறது.

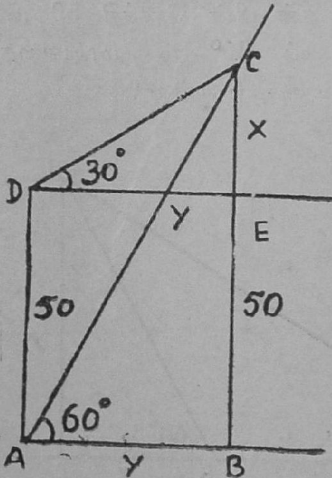
(அ-து) $x+50 = 3x.$

(அ-து) $2x = 50.$

(அ-து) $x = 25.$

ஆகவே அந்த ஆற்றின் அகலம் 25 அடி.

பயிற்சி 3. 50 அடி உயரமுள்ள ஒரு மேடையின் அடிப்பாகத்திலிருந்து பார்க்கும்பொழுது ஒரு குன்றின் எற்றக்கோணம் 60°. அதன் உச்சியிலிருந்து பார்க்கும்பொழுது அக்குன்றின் எற்றக்கோணம் 30°. அக்குன்றின் உயரம் என்ன?



படம் 23

BC என்பதைக் குன்றாகவும் AD என்பதை மேடையாகவும் வைத்துக்கொள்வோம். DE என்பதை AB-க்கு ஒரு போகாக வரைக. $CE = x$ ஆகவும் $AB = DE = y$ ஆகவும் கொள்வோம்.

CDE முக்கோணத்தில்

$$y = x \cot 30^\circ = x\sqrt{3}. \qquad (1)$$

ABC முக்கோணத்தில்

$$y = (x+50)\cot 60^\circ$$

$$= \frac{(x+50)}{\sqrt{3}}. \qquad (2)$$

ஆகவே (1), (2)-லிருந்து

$$x\sqrt{3} = \frac{x + 50}{\sqrt{3}}$$

$$(\text{அ-து}) \quad x = 25$$

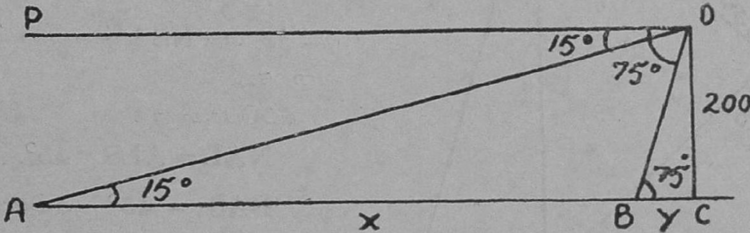
ஆகையால் குன்றின் உயரம் $(50 + x) = 75$ அடி.

பயிற்சி 4. கடலோரத்தில் இருக்கும் ஒரு குன்றின் உயரம் 200 அடி. அதன் உச்சியிலிருந்து அக்குன்றின் நேரே மேற்காக நிற்கும் இரண்டு படகுகளது இறக்கக்கோணம் 150° ஆகவும், 75° ஆகவும் காண்கிறான். கீழே கொடுக்கப்படுபவைகளைக் கொண்டு அவ்விரண்டு படகுகளின் இடையிட்ட தூரத்தைக் காண்க.

$$\cot 15^\circ = 2 + \sqrt{3}$$

$$\cot 75^\circ = 2 - \sqrt{3}.$$

CO என்பதைக் குன்ருகவும், **A, B** ஆகிய இரண்டையும் படகுகளாகவும், **OP** என்பதை **O** வழிச் செல்லும் படுக்கைக் கோடாகவும் வைத்துக்கொள்வோம்.



படம் 24

அப்படியானல் $POB = OBC = 75^\circ$

$$POA = OAC = 15^\circ$$

$AB = x$, $BC = y$ என்று வைத்துக்கொள்வோம்.

$$\therefore \quad AC = x + y$$

OBC முக்கோணத்தில்

$$y = 200 \cot 75^\circ = 200\,(2 - \sqrt{3}) \qquad (1)$$

OAC என்ற முக்கோணத்தில்

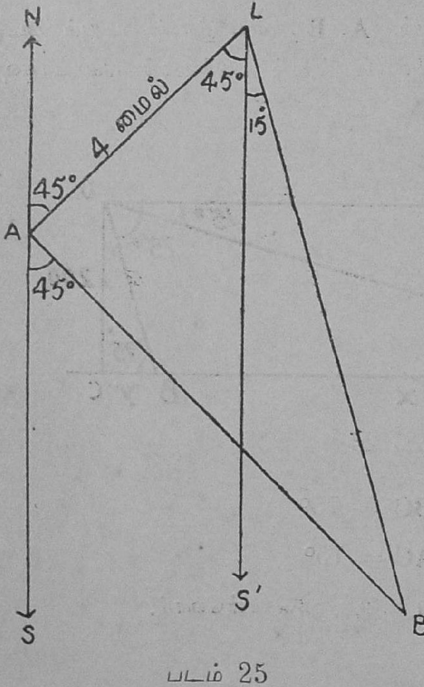
$$x+y = 200 \cot 15^\circ = 200\,(2+\sqrt{3}) \qquad (2)$$

(2)-லிருந்து (1)-ஐக் கழிக்கும்பொழுது

$$x = 400\sqrt{3}$$
$$= 692{\cdot}8.$$

ஆகவே படகுகளின் இடையிட்ட தூரம் = 692·8 அடி.

பயிற்சி 5. **L** என்ற ஒரு துறைமுகத்திலிருந்து **A, B** என்ற இரண்டு கப்பல்கள் போவதைக் காண்கிறார்கள். ஒன்று தென் மேற்காகவும், மற்றொன்று 15° தென் கிழக்காகவும் போகின்றன. அதே சமயத்தில் **B, A**-யினது தென் கிழக்குத் திசையில் ஓடுகிறது. **LA** 4 மைல் ஆனால் அவற்றின் இடையிட்ட தூரம் என்ன ?



படம் 25

LS′ என்பதை நேராகத் தெற்கு நோக்கி வரைக.

ALS′ = 45°, **BLS′** = 45°

ஆகவே **ALB** = 60°.

A-யின் வழியாகத் தெற்கும் வடக்குமாக **NS** என்ற கோட்டை வரைக.

அப்பொழுது

NAL = **ALS** = 45°.

BAS = 45° எனெனின் **B, A**-ன் தென்கிழக்கு.

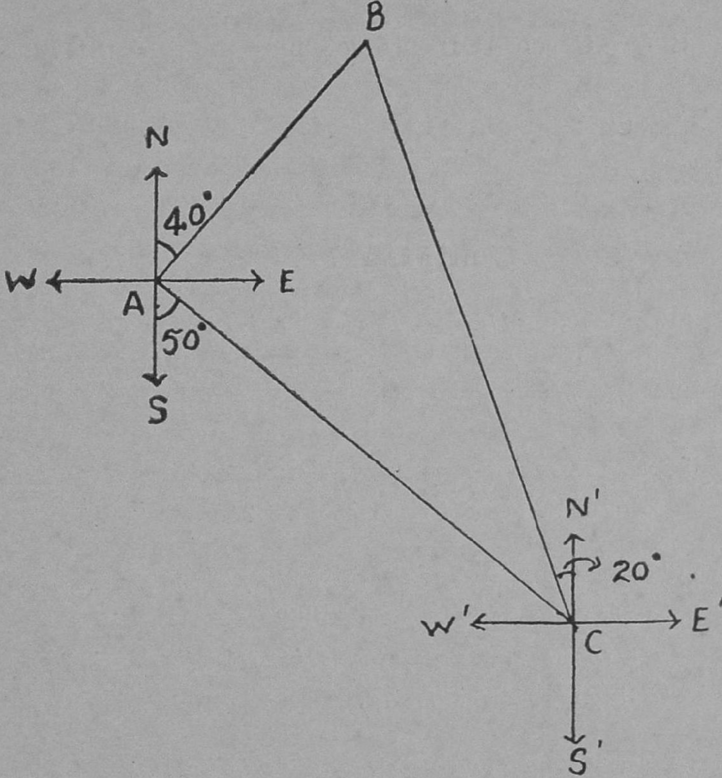
ஆகவே **BAL** = 90°

ABL செங்கோண முக்கோணத்தில்

$$AB = AL \tan ALB$$
$$= 4 \tan 60^\circ$$
$$= 4\sqrt{3} = 6{\cdot}928.$$

ஆகவே அவற்றின் இடையேயுள்ள தூரம் 6·928 மைல்,

பயிற்சி 6. காலை 9 மணிக்கு, மணிக்கு 8 மைல் வேகத்தில் 50° தென்கிழக்குத் திசையில் ஓடும் ஒரு கப்பல் 40° வடகிழக்காக ஒரு துறைமுகத்தைக் காண்கிறது. 11 மணிக்கு அதே துறைமுகம் 20° வடமேற்குத் திசையில் தெரிகிறது. அப்படியானல் ஒவ்வொரு இடத்திலிருந்தும் அத்துறைமுகம் எவ்வளவு தூரத்தில் இருக்கிறது?



படம் 26

A, B ஆகிய இரண்டையும் கப்பல் நின்று பார்க்கும் இடங்களாகவும், **B** துறைமுகமாகவும் கொள்க. **A**யின் வழியாக திசைக்கோடுகள் வரைக.

$$EAC = 40°, \ EAB = 50°$$

$$\therefore \quad BAC = 90°$$

C வழியாக CN^1 கோட்டை வடக்கு நோக்கி வரைக.

அப்படியானல் $BCN^1 = 20^\circ$

$$ACN^1 = CAS = 50^\circ$$

$$ACB = ACN^1 - BCN^1 = 30^\circ$$

ACB செங்கோண முக்கோணத்தில்

$$AB = AC \tan ACB = 16 \tan 30^\circ = \frac{16}{\sqrt{3}} \simeq 9{\cdot}237.$$

$$BC = AC \sec ACB = 16 \sec 30^\circ = \frac{16 \times 2}{\sqrt{3}} = 18{\cdot}474.$$

ஆகவே துறைமுகம், ஒவ்வொரு இடத்திலிருந்தும் 9·327 மைல், 18·474 மைல் தூரத்தில் இருக்கிறது.

பயிற்சிகள் 7.

1. 300 அடி தூரத்திற்கு அப்பால் இருக்கும் ஒரு கோபுரத்தின் உச்சியினுடைய எற்றக்கோணம் 30° ஆனல் அதன் உயரம் என்ன ?

2. 6 அடி உயரமுள்ள ஒரு தூணின் நிழல் $2\sqrt{3}$ அடி நீளமானல் சூரியனின் எற்றக்கோணம் என்ன ?

3. 86·6 அடிக்கு அப்பாலுள்ள ஓர் இடத்திலிருந்து ஒரு மேடை உச்சியின் எற்றக்கோணம் 30° ஆனல் அம்மேடையின் உயரமும், அம்மேடையின் உச்சியிலிருந்து அவ்விடத்திற்குள்ள தொலையும் காண்க.

4. 45 அடி நீளமுள்ள எணி ஒன்றைச் சுவரின் உச்சியைத் தொடும்படி சார்த்தினல் அவ்வுச்சியில் எற்படும் கோணம் 60°. ஆனல் அச்சுவரின் உயரமும், சுவரின் அடிப்பாகத்திற்கும் எணியின் அடிப்பாகத்திற்கும் இடையிலுள்ள தொலையும் யாவை ?

5. ஒரு மேடை உச்சியின் எற்றக்கோணம் 30°. 100 அடி மேடையை நோக்கி நடந்தால் அதன் எற்றக்கோணம் 60° ஆக மாறுகிறது. ஆனல் அம்மேடையின் உயரம் என்ன ?

6. கொடித்தூண் ஒன்று ஒரு கட்டிடத்தின்மேல் நிற்கிறது. 40 அடி தூரத்திலிருந்து பார்க்கும்போது அக்கொடித் தூணினதும், கட்டிடத்தினதும் ஏற்றக்கோணங்களாவன முறையே 60°-யும், 30°-யும் ஆனுல் அத்தூணின் உயரம் என்ன ?

7. தூபி ஒன்றின் நேரே கிழக்கேயுள்ள 200 அடி இடையிட்ட இரண்டு இடங்களிலிருந்து அந்தத் தூபியின் ஏற்றக் கோணங்கள் முறையே 45°-யும், 30°-யும் ஆகும். தூபியின் உயரமென்ன ?

8. 30 அடி உயரமுள்ள ஒரு தூணின் அடியிலிருந்து குன்று ஒன்றின் உச்சியின் ஏற்றக்கோணம் 45°. அத்தூணின் உச்சியிலிருந்து பார்க்கும்போது அவ்வேற்றக்கோணம் 30° ஆக மாறுகிறது. ஆனுல் அக்குன்றின் உயரமும் தொலேயும் என்ன ?

9. 25 அடி உயரமுள்ள ஒரு சுவரின் அடியிலிருந்து ஒரு மேடை உச்சியின் ஏற்றக் கோணம் 45°. அச்சுவரின் உச்சியி லிருந்து பார்க்கும்பொழுது அவ்வேற்றக் கோணம் 30° ஆக மாறுகிறது. அம்மேடையின் உயரமும் தொலேயும் என்ன ?

10. 200 அடி உயரமுள்ள ஒரு குன்றின் அடியிலிருந்து ஒருவன் படகை ஓட்டிச்செல்கிருன். அப்படகிலிருந்து அக்குன்றின் உச்சியைப் பார்க்கும் ஒருவன் அக்குன்றின் உச்சியின் ஏற்றக் கோணம் 2 நிமிடங்களில் 45°ல் இருந்து 30° ஆக மாறுவதைக் காணுகிருன். அப்படகின் வேகம் என்ன ?

11. ஒரு மலே 700 அடி உயரம். அம்மலேயின் உச்சியிலிருந்து பார்க்கும் ஒருவன் அம்மலேக்கு நேராக மேற்கில் இருக்கும் இரண்டு பொருள்களினது இறக்கக் கோணங்கள் 45° ஆக வும், 30° ஆகவும் காணுகிருன். அப்படியாயின் அவைகளின் இடையிட்ட தூரம் என்ன ?

12. 450 அடி உயரமுள்ள மலேயிலிருந்து நேராக வடக்கே கடலில் நிற்கும் இரண்டு படகுகளின் இறக்கக் கோணங்கள் 30°-யும், 18°-யும் ஆகும். அப்படகுகள் எவ்வளவு தூரம் இடையிட்டு நிற்கின்றன ?

13. 240 அடி உயரமுள்ள ஒரு கலங்கரை விளக்கின் உச்சியி லிருந்து பார்க்கும் ஒருவன் இரண்டு குன்றுகளினது இறக்கக் கோணங்கள் 75° ஆகவும், 15° ஆகவும் இருக்கக் காண்கிறான். கீழே கொடுத்திருப்பவைகளைக் கொண்டு அக்குன்றின் இடையிட்ட தூரத்தைக் காண்க.

($\cot 75^\circ = \cdot 268$, $\cot 15^\circ = 3\cdot 732$)

14. 96 அடி உயரமுள்ள ஒரு மலையிலிருந்து பார்க்கும் ஒருவனுக்கு ஒரு மேடை உச்சியினதும், அடியினதும் இறக்கக் கோணங் கள் முறையே 30° ஆகவும், 60° ஆகவும் தோன்றுமானால், அம்மேடையின் உயரம் என்ன ?

15. கிழக்கு நோக்கிச் செல்லும் மனிதன் ஒருவன் வடகிழக்குத் திசையில் இரண்டு பொருள்களைக் காணுகிறான். 800 அடி நடந்த பின்பு ஒன்று அவனுக்கு நேராக வடக்கிலும், மற்றொன்று அவனுக்கு வடமேற்குத் திசையிலும் இருக் கின்றன. அப்படியானால் முதலில் அப்பொருள்களிலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் இருந்தான் ?

16. கிழக்கு நோக்கிச் செல்லும் கப்பலிலிருந்து, ஒருவன் தெற்கே இரண்டு கப்பல்கள் நங்கூரம் இட்டு நிற்பதைக் கண்டான். மூன்று மைல் சென்ற பிறகு அவன் அக்கப்பல்கள், மே. 60° தெ.-லும், மே. 30° தெ.-லும் நிற்பதைக் கண் டான். அப்பொழுது அவை அவனிடத்திலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் நிற்கின்றன ?

17. வடக்கு நோக்கி நிற்கும் கலங்கரை விளக்கு ஒன்று வடகிழக்கி லிருந்து வடமேற்குப் பக்கமாக ஓர் ஒளியை அனுப்புகிறது. 5 மைலுக்கு அப்பால் மேற்கு நோக்கிச் செல்லும் கப்பல் ஒன்று அவ்வொளியை $30\sqrt{2}$ நிமிடங்கள் தொடர்ந்து காணுமானால் கப்பலின் வேகம் என்ன ?

18. கிழக்கு நோக்கிச் செல்லும் கப்பல் ஒன்று உச்சி வேளையில் வடகிழக்குப் பக்கமாக 15 மைல் தூரத்தில் ஒரு கலங்கரை விளக்கைக் காணுகிறது. மாலை 1-30 மணிக்கு அவ்விளக்கு வடமேற்குத் திசையில் இருக்கிறது. ஒரு நாளைக்கு அக் கப்பல் எத்தனை மைல் ஓடுகிறது ?

19. காலே 10 மணிக்கு ஒரு கப்பலைக் கலங்கரை விளக்கிலிருந்து ஒருவன் 9 மைல் தூரத்தின் வடகிழக்குத் திசையில் காண்கிருன். அக்கப்பல் தென்கிழக்குத் திசை நோக்கி ஓடுகிறது. 1 மணிக்கு அக்கப்பலை கி. 15° தெற்காகக் காண்கிருன். அப்படியாளுல் அக்கப்பலின் வேகத்தையும் இரண்டாவது முறை பார்க்கும்பொழுது கப்பல் அவ்விளக்கிலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் நிற்கிறது என்பதையும் காண்க.

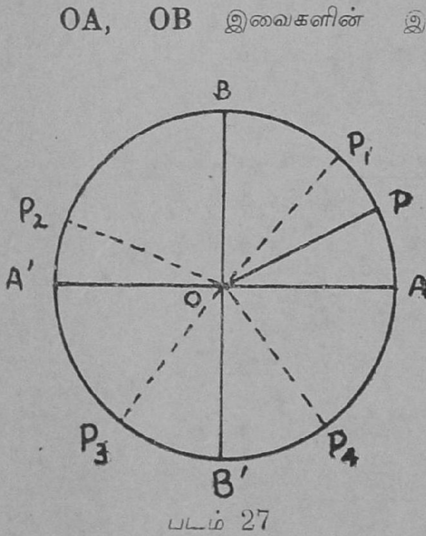
20. நேராகத் தெற்கு நோக்கிச் செல்லும் கப்பலில் இருந்து ஒருவன் அவனுக்கு நேராக மேற்கே இரண்டு கலங்கரை விளக்குகள் நிற்பதைக் காண்கிருன். 10 மைல் பிரயாணம் செய்த பின்பு அவை வடமேற்காகவும், வடமேற்கின் மேற்காகவும் நிற்கின்றன. அப்படியாளுல் முதலில் பார்க்கும்பொழுது அவை கப்பலில் இருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் இருந்தன?

அதிகாரம் 4

எல்லாவிதப் பருமனுடைய கோணங்களும் (angles of all magnitudes), அவைகளின் தகவுகளும்—சில துணைக் கோணங்களின் தகவுகள்.

26. எல்லாவிதப் பருமனுடைய கோணங்கள்:—AOA' BOB' என்ற இரண்டு நிலைத்த கோடுகள் (**fixed straight lines**) O என்ற புள்ளியில் வெட்டுகிறதென்றும், அந்த இரண்டு கோடுகளுக்கு இடையிலுள்ள கோணம் ஒரு செங்கோணமென்றும், OP கோடு OA கோட்டிலிருந்து புறப்பட்டு, O என்ற நிலைப் புள்ளியை (**fixed point**) இடமாகச் (**anticlockwise**) சுற்றுவதாகவும் வைத்துக்கொள்வோம்.

OA, OB இவைகளின் இடையில் OP_1 இடத்தில் OP இருக்கும்பொழுது அது சுற்றின கோணம் AOP_1. அது ஒரு செங்கோணத்தைவிடச் சிறிதாக இருக்கும். சுற்றுங்கோடு, OB, OA' என்பவைகளின் இடையில் OP_2 இடத்தில் இருக்கும்பொழுது AOP_2 ஒரு செங்கோணத்தை விடப் பெரிதாகவும், இரண்டு செங்கோணங்களைவிடச் சிறிதாகவும் இருக்கிறது. OA', OB' இவைகளின் இடையில் OP_3 இடத்தில் இருக்கும்போது, AOP_3 இரண்டு செங்கோணத்தைவிடப் பெரிதாகவும், மூன்று செங்கோணங்களைவிடச் சிறிதாகவும் இருக்கிறது. OB', OA இவைகளின் இடையில் OP_4 இடத்தில் இருக்கும்பொழுது AOP_4 மூன்று செங்கோணங்களைவிடப் பெரிதாகவும், நான்கு செங்கோணங்களைவிடச் சிறிதாகவும் இருக்கிறது. OP ஒரு முழுச்சுற்று சுற்றின பிறகு OA-வோடு ஒன்றுபடுகிறது. அப்பொழுது அது சுற்றின கோணம் நான்கு செங்கோணங்கள். மறுபடியும்



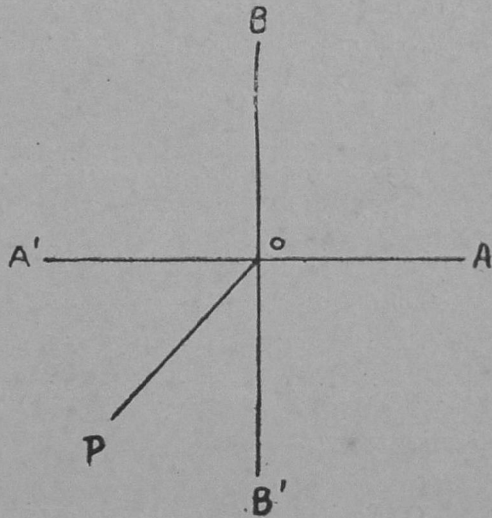
படம் 27

OP_1 இடத்தில் வரும்பொழுது அது சுற்றின கோணம் 4 செங் கோணங்கள் $+ AOP_1$. இவ்வாறே OP, இரண்டு சுற்றுகள் சுற்றி, OP_2 இடத்தில் இருக்கும்பொழுது அது சுற்றின கோணம் 8 செங்கோணங்கள் $+ AOP_2$.

OP என்ற சுற்றுங்கோடு, OA, OB என்பவைகளின் இடையில் இருக்கும்பொழுது முதல் கால் வட்டத்திலும்; OB, OA^1 என்பவைகளின் இடையில் இருக்கும்பொழுது இரண்டாவது கால் வட்டத்திலும்; OA^1, OB^1 என்பவைகளின் இடையில் இருக்கும்பொழுது மூன்ருவது கால் வட்டத்திலும்; OB^1, OA என்பவைகளின் இடையில் இருக்கும்பொழுது நான்காவது கால் வட்டத்திலும் இருப்பதாகக் கூறப்படுகிறது.

27. மிகைக்கோணங்களும் குறைக்கோணங்களும் (positive and negative angles) :— OP என்ற சுற்றுங்கோடு, இடமாகச் சுற்றும்போது சுற்றின கோணங்கள் **மிகைக்கோணங்கள்** (positive angles) எனவும், வலமாகச் சுற்றும்போது சுற்றின கோணங்கள் **குறைக்கோணங்கள்** (negative angles) எனவும் கொள்வது வழக்கம்.

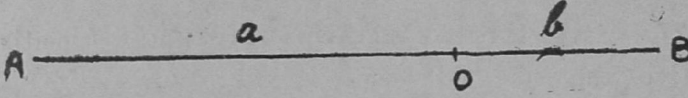
28. சுற்றுங்கோடு OA-விருந்து புறப்பட்டு, OA, OB^1 என்பவைகளின் இடையிலுள்ள சமவெட்டியோடு (bisector) ஒன்றுபடுவதாக வைத்துக்கொள்வோம். OP இடமாகச் சுற்றினல் அது சுற்றின கோணம் $+225°$. ஆனல் OA-விருந்து புறப்பட்டு வலமாகச் சுற்றி அதே இடத்திற்கு வந்தால் சுற்றின கோணம் $-135°$. நமக்கு OP எந்தப் பக்கமாகச் சுற்றினது என்று தெரியாமலிருந்தால் OP ஒன்று அல்லது இரண்டு அல்லது மூன்று......சுற்றுகள் சுற்றின பிறகு மிகைக்கோணம் AOPஐச் சுற்றினதாக இருக்கலாம்; அல்லது ஒன்று அல்லது இரண்டு, அல்லது மூன்று...சுற்றுகள் எதிர்த்திசையில் (வலமாக)



படம் 28

சுற்றின பிறகு குறைக் கோணம் **AOP**-ஐச் சுற்றினதாகவும் இருக்க லாம். ஆகவே சுற்றின கோணம் பின்வரும் கோணங்களில் எதாவது ஒன்ருக இருக்கும் :—$225°$, $360° + 225°$, $2 \times 360° + 225°$, $3 \times 360 + 225$,...... ; $-135°$, $-360° - 135°$, $-2 \times 360° - 135°$, $-360° \times 3 - 135°$,......அஃதாவது $225°$, $585°$, $945°$, $1305°$......, $-135°$, $-495°$, $-855°$, $-1215°$,...........

29. **மிகைக் கோடுகளும் எதிர்க் கோடுகளும் (positive and negative lines) :—AB** என்ற நிலைக் கோட்டில், **O** என்ற நிலைப்



படம் 29

புள்ளி இருப்பதாக வைத்துக்கொள்வோம். மேலும் அக் கோட்டி லிருக்கும் வேறு புள்ளிகளின் இருப்பிடங்களை, O-ன் இருப்பிடத்தி லிருந்து அறியவேண்டுமென்று வைத்துக்கொள்வோம். அக்கோட்டி லிருக்கும் ஒரு புள்ளியின் இடத்தை அறிவதற்கு, O-விருந்து அதன் தொலையும், அது O-க்கு எப்பக்கம் இருக்கிறது என்பதும் தெரிய வேண்டும். தொலைமட்டும் தெரிவதனல் புள்ளியின் இடத்தை நிச்சயமாக எது என்று சொல்ல முடியாது.

ஆகவே தொலைகளை ஒரு கோட்டில் குறிப்பிடும்பொழுது, எதாவது ஒரு திசையைத் திட்டமான திசையாகக் **(standard direction)** கொள்வதுநலம். அத்திசையை மிகைதிக்கெனவும், அத்திசையை நோக்கி அளக்கும் தொலைகளை மிகைத்தொலைகளெனவும் **(positive distances)**, அத்திசைக்கு எதிர்த் திசையை நோக்கி அளக்கும் தொலைகளைக் குறைத் தொலைகள் அல்லது எதிர்த் தொலைகள் **(negative distances)** எனவும் கொள்வது மரபு.

O-விருந்து வலப் பக்கமாக அளக்கும் தொலைகளை மிகை எண்க ளாலும், இடப்பக்கமாக அளக்கும் தொலைகளைக் குறை எண்களாலும் குறிப்பிடுவது வழக்கம். எடுத்துக்காட்டாக **OA, OB** என்பவைகளின்

அளவுகள் முறையே a, b என்று வைத்துக்கொண்டால் **OA**-ன் நீளம் $-a$, **OB**-ன் நீளம் $+b$.

AB-க்குக் குத்துக்கோடுகளாக இருக்கின்ற கோடுகளுக்கு மிகை திக்கு புத்தகப் பக்கத்தின் மேல்பாகமும், எதிர்த் திக்கு புத்தகப் பக்கத்தின் கீழ்ப்பாகமுமாகும்.

30. ஒரு புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் (co-ordinates of a point) :—XOX^1 YOY^1 என்ற இரண்டு குத்துக்கோடுகள் **O**-ல் வெட்டுகிறதென்று வைத்துக்கொள்வோம். அப்பொழுது தளத்தை **XX^1, YY^1** நான்கு கால்வட்டங்களாகப் **(quadrants)** பிரிக்கின்றன.

தளத்திலிருக்கும் **P** என்ற புள்ளியை நிச்சயிக்க, **XX^1, YY^1**-லிருந்து அதன் தொலைகளும் போக்குகளும் **(directions)** தெரியவேண்டும். **P**-லிருந்து **PM, PN** என்பவற்றை **OX, OY**-க்குக் குத்துக்கோடாக வரைந்தால் **OM**-ஐ **P**-யின் மட்டாயம் அல்லது x ஆயத்தொலை (x **co-ordinate**) என்றும் **ON**-ஐ **P**-யின் குத்தாயம் அல்லது y ஆயத்தொலை (y **co-ordinate**) என்றும் குறிப்பிடுவது வழக்கம்.

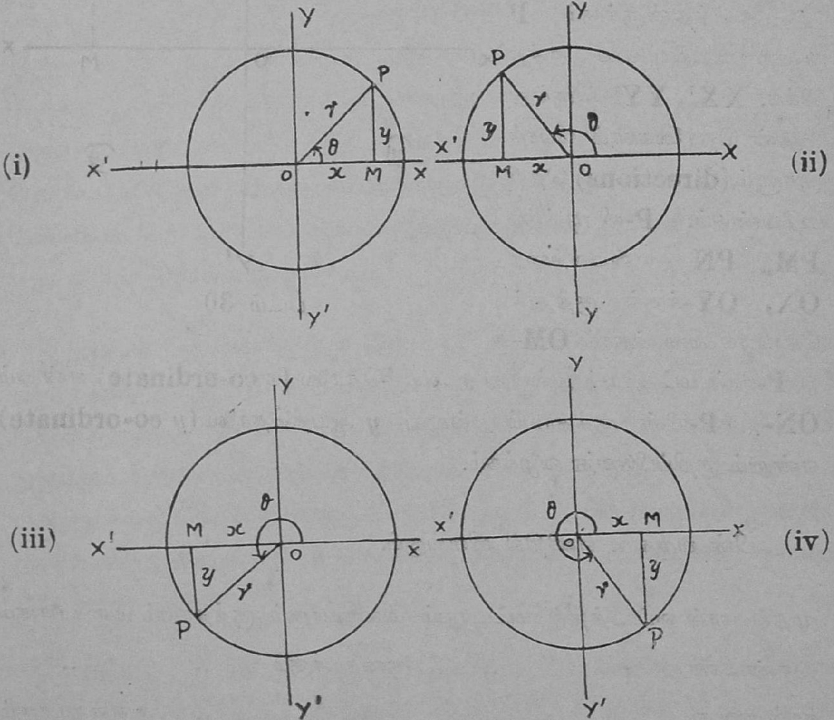
படம் 30

பின் வருவன எளிதில் விளங்கும்.

முதல் கால் வட்டத்தில்	மட்டாயம்	மிகையாகும்	குத்தாயம்	மிகையாகும்
இரண்டாவது	,,	குறையாகும்	,,	,,
மூன்றாவது	,,	,,	,,	குறையாகும்
நான்காவது	,,	மிகையாகும்	,,	,,

31. எல்லாவிதப் பருமனுடைய கோணங்களின் கோண கணிதத் தகவுகள் :—இரண்டாவது அதிகாரத்தில் குறுங்கோணத்தின் கோண கணிதத் தகவுகளைச் செங்கோண முக்கோண மூலமாக வரையறுத்தோம். 90°-ஐவிடப் பெரிய கோணத்தின் தகவுகளை வரையறுப்பதற்கு அம் முறையைக் கையாள இயலாது; ஏனெனின் செங்கோண முக்கோணத்தின் கோணங்கள் 90°-ஐவிடப் பெரியனவாக இருத்தல் முடியாது. ஆகவே 90°-ஐவிடப் பெரியனவாக இருக்கும் கோணங்களின் தகவுகள் பின் வருமாறு வரையறுக்கப்படுகின்றன.

OX, OY என்ற இரண்டு நேர் ஆயங்களை **(rectangular axes)** எடுத்துக்கொள்வோம். r நீளமுடைய **OP** என்னும் கோடு, **OX**-லிருந்து புறப்பட்டு இடமாகச் சுற்றுவதென்றும், $XOP=\theta$ என்றும் வைத்துக் கொள்வோம். அப்பொழுது θ-வின் கோண கணிதத் தகவுகள் பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகின்றன.



படம் 31

$$\sin\theta = \frac{\text{P-ன் } y \text{ ஆயத்தொலே}}{\text{OP}} = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{P-ன் } x \text{ ஆயத்தொலே}}{\text{OP}} = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{P-ன் } y \text{ ஆயத்தொலே}}{\text{P-ன் } x \text{ ஆயத்தொலே}} = \frac{y}{x}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{OP}}{\text{P-ன் } y \text{ ஆயத்தொலே}} = \frac{r}{y}$$

$$\sec\theta = \frac{\text{OP}}{\text{P-ன் } x \text{ ஆயத்தொலே}} = \frac{r}{x}$$

$$\cot\theta = \frac{\text{P-ன் } x \text{ ஆயத்தொலே}}{\text{P-ன் } y \text{ ஆயத்தொலே}} = \frac{x}{y}$$

32. குறுங்கோணத்தின் கோண கணிதத் தகவுகளின் வரையறை (**definition**) மேற் குறித்திருக்கும் வரையறையிலிருந்து வேறுபட்ட தன்று என்பது கருதற்பாலது. ஏனெனின் θ குறுங்கோணமாக இருந்தால் P முதல் கால் வட்டத்திலிருக்கிறது. (படம் 31(i)) அப்பொழுது அதன் ஆயத்தொலேகள் ON, MP என்றும் அவை மிகை நீளங்களென்றும் எளிதில் காணலாம்.

33. கோண கணிதத் தகவுகளின் குறிகள் :—

படம் 31(i)-ல் θ முதல் கால் வட்டத்திலிருக்கிறது. P-யின் ஆயத்தொலேகள் மிகைகளாக இருக்கின்றன.

படம் 31 (ii)-ல் θ இரண்டாவது கால் வட்டத்திலிருக்கிறது. P-யின் y ஆயத்தொலே மிகையாகவும், x ஆயத்தொலே குறையாகவும் இருக்கின்றன. ஆகவே **sin** θ மிகையாகவும் ; **cos** θ, **tan** θ என்பவை குறையாகவும் இருக்கின்றன.

படம் 31 (iii)-ல் θ மூன்றாவது கால் வட்டத்தில் இருக்கிறது. P-யின் ஆயத்தொலேகள் குறையாக இருக்கின்றன. ஆகவே **sin** θ, **cos** θ என்பவை குறையாகவும், **tan** θ மிகையாகவும் இருக்கின்றன.

படம் 31 (iv)-ல் θ நான்காவது கால் வட்டத்தில் இருக்கிறது. P-யின் x ஆயத்தொலே மிகையாகவும், y ஆயத்தொலே குறையாகவும் இருக்கின்றன. ஆகவே **sin** θ, **tan** θ என்பவை குறையாகவும், **cos** θ மிகையாகவும் இருக்கின்றன.

பின்வரும் படங்களும், அட்டவணையும் கோண கணிதத் தகவுகளின் குறிகளை விளக்கும்.

நெடுக்கை		கிடக்கை		இருக்கை	
+	+	−	+	−	+
−	−	−	+	+	−
எதிர் நெடுக்கை		எதிர் கிடக்கை		எதிர்இருக்கை	

படம் 32

கால் வட்டம்	I	II	III	IV
நெடுக்கை எதிர்நெடுக்கை }	+	+	−	−
கிடக்கை எதிர்கிடக்கை }	+	−	−	+
இருக்கை எதிரிருக்கை }	+	−	+	−

34. θ எவ்வித மதிப்புடையதாக இருப்பினும் இரண்டாவது அதிகாரத்தில் 15-ஆவது தொகுதியில் நிறுவின

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

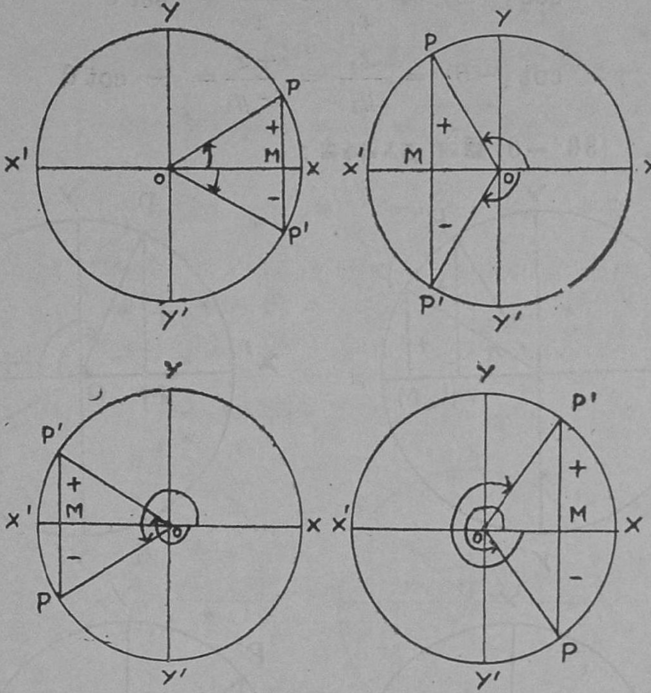
$$1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

என்ற அடிப்படையான தொடர்புகள் உண்மையென எளிதில் காட்டலாம்.

சில துணைக்கோணங்களின் கோண கணிதத் தகவுகள்

35. **$(-\theta)$-வின் தகவுகள் :**



படம் 33

r நீளமுடைய ஒரு கோடு **OX**-லிருந்து புறப்பட்டு, θ° சுற்றின பிறகு **OP** இடத்திலும், $-\theta^\circ$ சுற்றின பிறகு OP^1 இடத்திலும் இருப்பதாகக் கொள்வோம். அப்பொழுது எல்லாக் கால் வட்டங்களிலும்

$$POM = P^1OM$$

$\therefore$ **POM, P^1OM** என்பவை அடங்கலும் ஒத்த முக்கோணங்களாய் **(congruent triangles)** இருக்கின்றன.

ஆகவே $MP = MP^1$ (எண்ணளவில்) **(numerically)**

P-ன் ஆயத்தொலைகள் (x, y) என்றும், P^1-ன் ஆயத்தொலைகள் (x_1, y_1) என்றும் கொண்டால் $x_1 = x$; $y_1 = -y$.

$$\therefore \quad \sin(-\theta) = \frac{y_1}{r} = \frac{-y}{r} = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \frac{x_1}{r} = \frac{x}{r} = \cos\theta$$

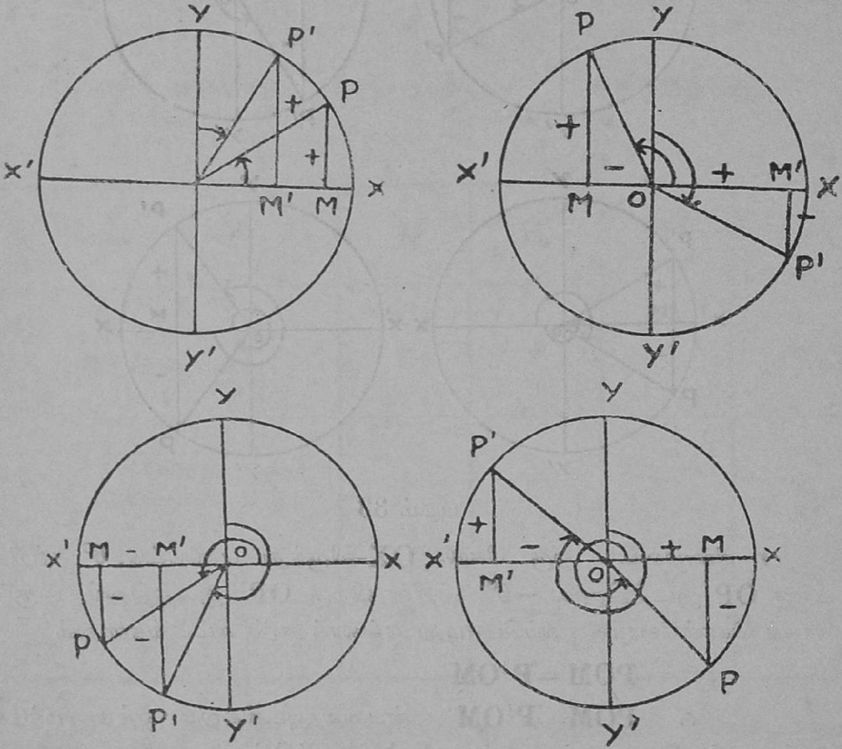
$$\tan(-\theta) = \frac{y_1}{x_1} = \frac{-y}{x} = -\tan\theta$$

$$\operatorname{cosec}(-\theta) = \frac{r}{y_1} = \frac{+r}{-y} = -\operatorname{cosec}\theta$$

$$\sec(-\theta) = \frac{r}{x_1} = \frac{r}{x} = \sec\theta$$

$$\cot(-\theta) = \frac{x_1}{y_1} = \frac{+x_1}{-y_1} = -\cot\theta$$

36. $(90^\circ - \theta)$ **வின் தகவுகள் :**



படம் 34

r நீளமுடைய ஒரு கோடு **OX**-லிருந்து புறப்பட்டு θ° சுற்றின பிறகு **OP** இடத்திலும், **r** நீளமுடைய மற்றொரு கோடு **OX**-லிருந்து புறப்பட்டு $90^\circ - \theta^\circ$ சுற்றின பிறகு OP^1 இடத்திலும் இருப்பதாகக் கொள்வோம். OX-லிருந்து 90° சுற்றின பிறகு, θ° எதிர்த்திசையில் (வலமாக) சுற்றினால் OP^1-ன் இருப்பிடம் கிடைக்கப்பெறுகிறது.

மேல்வரைந்த படங்களிலிருந்து $POM = OP^1M^1$ என்றும்,

$\triangle OPM \equiv \triangle P^1OM^1$ என்றும் கிடைக்கின்றன.

$\therefore \quad MP = OM^1$ (இயற்கணிதப்படி)

$OM = M^1P^1$ (,,)

ஆகவே P-ன் ஆயத்தொலைகள் (x, y) என்றும், P^1-ன் ஆயத்தொலைகள் (x_1, y_1) என்றும் கொண்டால், $y = x_1$; $x = y_1$.

$$\text{ஆகவே} \quad \sin(90^\circ - \theta) = \frac{y_1}{r} = \frac{x}{r} = \cos\theta.$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{x_1}{r} = \frac{y}{r} = \sin\theta.$$

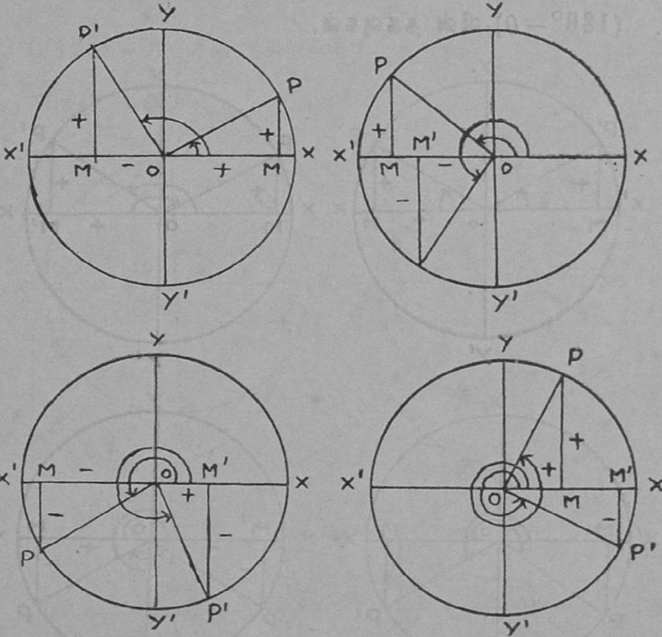
$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{y_1}{x_1} = \frac{x}{y} = \cot\theta.$$

இவ்வாறே $\operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) = \sec\theta.$

$$\sec(90^\circ - \theta) = \operatorname{cosec}\theta.$$

$$\cot(90^\circ - \theta) = \tan\theta.$$

37. $(90^\circ + \theta)$-வின் தகவுகள் :



படம் 35

r நீளமுடைய இரண்டு கோடுகள் OX-லிருந்து புறப்பட்டு, ஒன்று θ°-ம் மற்றொன்று $90^\circ + \theta^\circ$-ம் சுற்றினபிறகு முறையே OP, OP^1 இடங்களிலும் இருக்கின்றன என்று வைத்துக்கொள்வோம்.

OP எவ்விடத்திலிருப்பினும் $POP_1 = 90^\circ$.

$\therefore$ $POM = P^1OM^1$-ன் நிரப்பும் கோணம் $= OP^1M^1$

$\therefore$ $\triangle OMP \equiv \triangle P^1M^1O$

$\therefore \quad M^1P^1 = OM$

$OM^1 = -MP$ (இயற் கணிதப்படி).

P-ன் ஆயத்தொலைகள் (x, y) என்றும், P^1-ன் ஆயத்தொலைகள் (x_1, y_1) என்றும் கொண்டால் $y_1 = x$; $x_1 = -y$.

$$\therefore \quad \sin(90^\circ+\theta) = \frac{y_1}{r} = \frac{x}{r} = \cos\theta$$

$$\cos(90^\circ+\theta) = \frac{x_1}{r} = \frac{-y}{r} = -\sin\theta$$

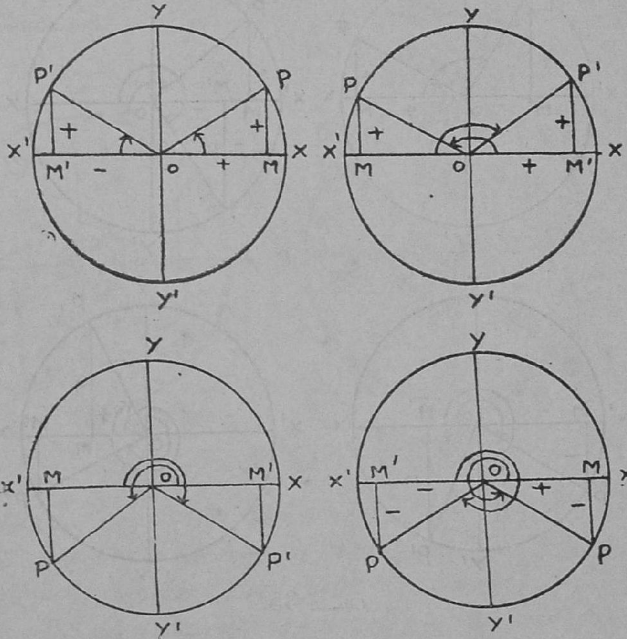
$$\tan(90^\circ+\theta) = \frac{y_1}{x_1} = \frac{+x}{-y} = -\cot\theta$$

இவ்வாறே $\operatorname{cosec}(90^\circ+\theta) = \sec\theta$

$\sec(90^\circ+\theta) = -\operatorname{cosec}\theta$

$\cot(90^\circ+\theta) = -\tan\theta$

38. $(180^\circ-\theta)$-வின் தகவுகள்.



படம் 36

r நீளமுடைய இரண்டு கோடுகள் OX-லிருந்து புறப்பட்டு, ஒன்று θ°-ம், மற்றொன்று $180^\circ-\theta^\circ$-ம் சுற்றினபிறகு முறையே OP, OP^1 இடங்களிலும் இருக்கின்றன என்று கொள்வோம்.

மேல் கொடுத்திருக்கும்படங்களிலிருந்து $POM = P^1OM^1$ என்றும் $\triangle OPM \equiv \triangle OP^1M^1$ என்றும் கிடைக்கின்றன.

$\therefore \quad MP^1 = MP$

$OM^1 = -OM$ (இயற்கணிதப்படி)

P-ன் ஆயத்தொலைகள் (x, y) என்றும், P^1-ன் ஆயத்தொலைகள் $(x_1\ y_1)$ என்றும் கொண்டால் $y_1 = y$; $x_1 = -x$.

$$\therefore \quad \sin(180° - \theta) = \frac{y_1}{r} = \frac{y}{r} = \sin\theta.$$

$$(\cos 180° - \theta) = \frac{x_1}{r} = \frac{-x}{r} = -\cos\theta.$$

$$(\tan 180° - \theta) = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y}{-x} = -\tan\theta.$$

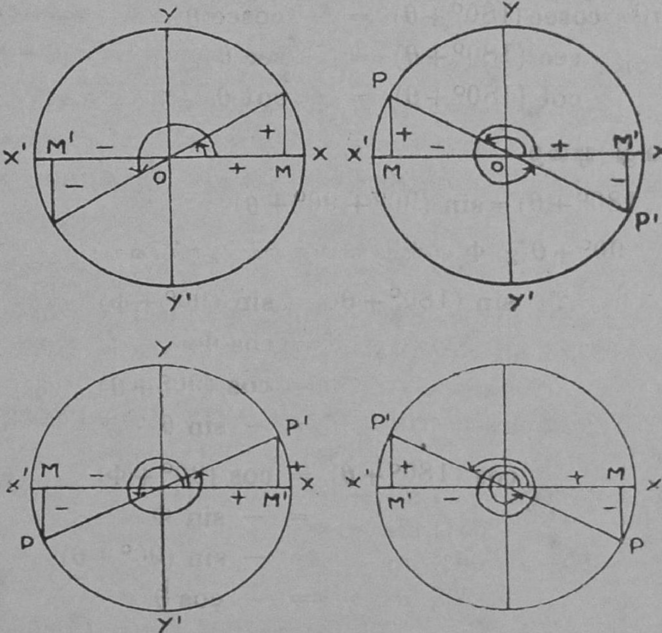
இவ்வாறே $\operatorname{cosec}(180° - \theta) = \operatorname{cosec}\theta.$

$\sec(180° - \theta) = -\sec\theta.$

$\cot(180° - \theta) = -\cot\theta.$

39. $(180° + \theta)$ வின் தகவுகள் :

முதல் முறை :—



படம் 37

r நீளமுடைய இரண்டு கோடுகள் OX-லிருந்து புறப்பட்டு, ஒன்று $\theta°$-ம், மற்றொன்று $180° + \theta°$-ம் சுற்றினபிறகு முறையே OP, OP^1 இடங்

களிலும் இருக்கின்றன என வைத்துக்கொள்வோம். இந்த இரண்டு கோணங்களின் வேற்றுமை 180° ஆகையால் OP, OP' கோடுகள் ஒரே கோட்டில் இருக்கின்றன.

$\therefore \quad POM = P'OM'$

$\triangle POM \equiv \triangle P'OM'$

$\therefore \quad M'P' = -MP$ (இயற் கணிதப்படி)

$OM' = -OM$ (,,)

P-ன் ஆயத்தொலைகளை (x, y) என்றும், P'-ன் ஆயத்தொலைகளை (x_1, y_1) என்றும் கொண்டால் $y_1 = -y$; $x_1 = -x$.

$$\therefore \quad \sin(180° + \theta) = \frac{y_1}{r} = \frac{-y}{r} = -\sin\theta$$

$$\cos(180° + \theta) = \frac{x_1}{r} = \frac{-x}{r} = -\cos\theta$$

$$\tan(180° + \theta) = \frac{y_1}{x_1} = \frac{-y}{-x} = \tan\theta$$

இவ்வாறே $\operatorname{cosec}(180° + \theta) = -\operatorname{cosec}\theta$

$\sec(180° + \theta) = -\sec\theta$

$\cot(180° + \theta) = \cot\theta$

இரண்டாவது முறை

$\sin(180° + \theta) = \sin(90° + 90° + \theta)$

$90° + \theta$-ஐ Φ என்று வைத்துக்கொள்வோம்

$$\begin{aligned} \therefore \quad \sin(180° + \theta) &= \sin(90° + \Phi) \\ &= \cos\Phi \\ &= \cos(90° + \theta) \\ &= -\sin\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(180° + \theta) &= \cos(90° + \Phi) \\ &= -\sin\Phi \\ &= -\sin(90° + \theta) \\ &= -\cos\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan(180° + \theta) &= \tan(90 + \Phi) \\ &= -\cot\Phi \\ &= -\cot(90° + \theta) \\ &= \tan\theta \end{aligned}$$

40. இந்த முறைப்படியே $270° \pm \theta$-வின் தகவுகளையும் காணலாம்.

$$\sin(270° + \theta) = -\cos\theta.$$
$$\cos(270° + \theta) = \sin\theta.$$
$$\tan(270° + \theta) = -\cot\theta.$$
$$\operatorname{cosec}(270° + \theta) = -\sec\theta.$$
$$\sec(270° + \theta) = \operatorname{cosec}\theta.$$
$$\cot(270° + \theta) = -\tan\theta.$$
$$\sin(270° - \theta) = -\cos\theta.$$
$$\cos(270° - \theta) = -\sin\theta.$$
$$\tan(270° - \theta) = \cot\theta.$$
$$\operatorname{cosec}(270° - \theta) = -\sec\theta.$$
$$\sec(270° - \theta) = -\operatorname{cosec}\theta.$$
$$\cot(270° - \theta) = \tan\theta.$$

41. 360°-யைவிடப் பெரிதாக θ இருக்குமானால் அதன் தகவுகளைக் காணல் சுலபமாகும். ஏனெனின், θ வோடு 360° அல்லது அதின் மடங்குகளைக் கூட்டவோ, கழிக்கவோ செய்தால், **OP**-யின் இறுதி இருப்பிடத்தைப் பாதிக்காது. ஆகவே n ஒரு முழு எண்ணுக இருப்பின் $n360° + \theta$-வின் தகவுகள் θ-வின் தகவுகளோடும், $n360° - \theta$-வின் தகவுகள் $(-\theta)$ வின் தகவுகளோடும், முழுதும் ஒத்தனவாக இருக்கின்றன.

42. சென்ற தொகுதிகளில் நிறுவியனவற்றிலிருந்து எந்தவிதமான பருமனுடைய கோணத்தின் தகவுகளையும், மிகைக் கணியமான (**positive quantity**) குறுங்கோணத்தினுடைய தகவுகளின் சார்பலனுகக் கூறல் இயலும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$\tan(735°) = \tan(2 \times 360° + 15°) = \tan 15°.$$
$$\sin(960°) = \sin(2 \times 360° + 240°) = \sin 240°.$$
$$= \sin(180° + 60°) = -\sin 60°.$$
$$\cos(2400°) = \cos(360° \times 6 + 240°) = \cos 240°.$$
$$= \cos(180° + 60°) = -\cos 60°.$$
$$\sin(-870°) = -\sin 870° = -\sin(2 \times 360° + 150°)$$
$$= -\sin(150°)$$
$$= -\sin(180° - 30°)$$
$$= -\sin 30°.$$
$$\cos(-780°) = \cos 780° = \cos 60°$$
$$\tan(-855°) = -\tan(855°) = -\tan(135°)$$
$$= -\tan(180° - 45°)$$
$$= \tan 45°$$
$$= 1.$$

பயிற்சி 1.

$$\frac{\cos(180^\circ - A)\sin(360^\circ - A)\cot(90^\circ + A)}{\tan(180^\circ + A)\cos(-A)\tan(90^\circ - A)}$$ ஐச் சுருக்குக.

$$\frac{\cos(180^\circ - A)\sin(360^\circ - A)\cot(90^\circ + A)}{\tan(180^\circ + A)\cos(-A)\tan(90^\circ - A)}$$

$$= \frac{-\cos A \times -\sin A \times -\tan A}{\tan A \times \cos A \times \cot A}$$

$$= -\frac{\sin^2 A}{\cos A}.$$

பயிற்சி 2. A, B, C என்பவை ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்களாக இருப்பின்

$$\sin\left(\frac{3A + 3B + 2C}{2}\right) + \cos\frac{C}{2} = 0$$ என்று நிறுவுக.

$A + B + C = 180^\circ,$

$$\therefore \sin\left(\frac{3A + 3B + 2C}{2}\right) + \cos\frac{C}{2}$$

$$= \sin\left(\frac{3A + 3B + 3C - C}{2}\right) + \cos\frac{C}{2}$$

$$= \sin\left(\frac{540^\circ - C}{2}\right) + \cos\frac{C}{2}$$

$$= \sin\left(270^\circ - \frac{C}{2}\right) + \cos\frac{C}{2}$$

$$= -\cos\frac{C}{2} + \cos\frac{C}{2}$$

$$= 0.$$

பயிற்சி 3.

$\dfrac{c}{a + b\cos\theta}$ வின் மீப்பெரு மதிப்பும், மீச்சிறு மதிப்பும் காண்க.

$\cos\theta$ வின் மீப்பெரு மதிப்பு $= 1$.

,, மீச்சிறு மதிப்பு $= -1$.

$$\therefore \frac{c}{a + b\cos\theta}\text{-வின் மீச்சிறு மதிப்பு} = \frac{c}{a+b}.$$

$$\frac{c}{a + b\cos\theta}\text{-வின் மீப்பெரு மதிப்பு} = \frac{c}{a-b}.$$

பயிற்சிகள் 8

கீழே கொடுத்திருப்பனவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க :—

1. $\sin(135°)$
2. $\cos 150°$
3. $\cos 240°$
4. $\text{cosec}(225°)$
5. $\cos(-120°)$
6. $\sin(-150°)$
7. $\tan(315°)$
8. $\sin(-240°)$
9. $\sec(-300°)$
10. $\tan\dfrac{5\pi}{4}$
11. $\sin\dfrac{4\pi}{3}$
12. $\text{cosec}\dfrac{2\pi}{3}$
13. $\sec\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$
14. $\text{cosec}\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)$
15. $\cot\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)$
16. கீழே கொடுத்திருப்பனவற்றை, 45°க்கு அகமுள்ள குறுங் கோணத்தின் தகவுகளின் சார்பலஞகைக் கூறுக :—

    $\sin(1220°)$, $\cos(-840°)$, $\tan(-640°)$, $\cot(300°)$, $\sec(420°)$, $\text{cosec}(480°)$, $\sin(300°)$, $\sin(750°)$, $\cos(-1125°)$, $\cot(1110°)$, $\cot(-1485°)$, $\tan(-240°)$, $\sec(-765°)$, $\sin(-1050°)$, $\cos(-1110°)$.
17. பின்வருவனவற்றை A-யின் சார்பலஞகைக் கூறுக :—

    $\sin(A-180°)$, $\cot(A-180°)$, $\cos(A-180°)$,

    $\tan\left(A-\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\text{cosec}(A-\pi)$, $\sec\left(\dfrac{3\pi}{2}-A\right)$.
18. $\cos A = -\frac{20}{29}$. A இரண்டாவது கால்வட்டத்தில் இருப்பின் sin A, tan A என்பவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.
19. $\cot A = \frac{9}{40}$ ஆகவும், Aயின் நெடுக்கை குறைக் கணியமாகவும் இருந்தால் cos A, tan A என்பவற்றின் மதிப்பைக் காண்க.
20. $\tan A = -\frac{7}{24}$. A நான்காவது கால்வட்டத்தில் இருப்பின் cos A, cosec A என்பவற்றின் மதிப்புகள் என்ன ?

பின்வருவனவற்றைச் சுருக்கிக் கூறுக :—

21. $\tan(180^\circ + A)\sin(90^\circ + A)\sec(90^\circ - A)$.

22. $\cos(90^\circ - \theta)\cos(180^\circ + \theta)\sin(90^\circ - \theta)\sin 180^\circ + \theta)$.

23. $\cos(90^\circ + A) + \sin(180^\circ - A) - \sin(180^\circ + A)$
$- \sin(-A)$.

24. $\sec(180^\circ + A)\sec(180^\circ - A) + \cot(90^\circ + A)$
$\tan(180^\circ + A)$.

25. $\sec(270^\circ - A)\tan(360^\circ + A)\sin(540^\circ + A)$.

26. $\operatorname{cosec}^2(180^\circ + 2\theta) - \cot^2(180^\circ - 2\theta)$.

27. $\sin(180^\circ + A) + \cos(90^\circ + A) + \cos(90^\circ - A) + \sin A$.

28. $\sec(360^\circ - A) + \operatorname{cosec}(720^\circ + A)$.

29. $\cot(270^\circ - A) + \cot(270^\circ + A)$.

30. $\dfrac{\cos(90^\circ - A)\cos(180^\circ - A)\tan(180^\circ + A)}{\sin(90^\circ + A)\sin(180^\circ - A)\tan(180^\circ - A)}$.

31. $\dfrac{\sin(180^\circ - A)\cos(270^\circ - A)}{\sin(180^\circ + A)\cos(270^\circ + A)}$.

32. A, B, C என்பவை ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்களாக இருப்பின் அடியில் கொடுத்திருப்பவைகளை நிறுவுக.

(1) $\sin\dfrac{C}{2} = \cos\dfrac{A + B}{2}$.

(2) $\cos\dfrac{C}{2} = \sin\dfrac{A + B}{2}$.

(3) $\sin C = \sin(A + B)$.

(4) $\cos C = -\cos(A + B)$.

(5) $\sin\dfrac{A + 3B + C}{2} = \cos B$.

(6) $\sin\dfrac{A + 2B + 3C}{2} + \sin\dfrac{C - A}{2} = 0$.

33. பின் வருவனவற்றின் மீப்பெரு மதிப்புகளும், மீச்சிறு மதிப்புகளும் காண்க.

(1) $5 + 4\sin\theta$.

(2) $\dfrac{a}{2 + \sin\theta}$.

அதிகாரம் 5

கூட்டுக்கோணங்களின் தகவுகள்

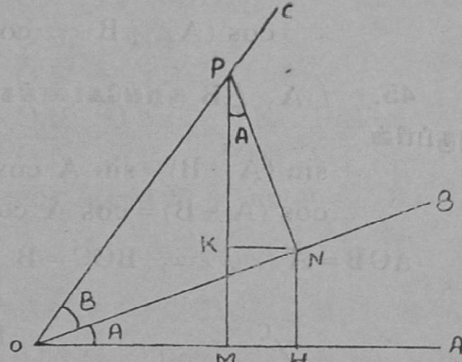
43. முன் அதிகாரத்தில் சில கோணங்களின் கூட்டல்தொகைக்கும் வேற்றுமைத் தொகைக்குமுள்ள (எடுத்துக்காட்டாக **sin** $90^\circ \pm \theta$ **sin** $180^\circ \pm \theta$) கோணகணிதத் தகவுகளைப் பார்த்தோம். இப்பொழுது ஏதாவது இரண்டு கோணங்களின் கூட்டல் அல்லது வேற்றுமைத் தொகையின் தகவுகளை, அதே கோணங்களின் தகவுகளின் சார்பலனாகக் கொடுக்கும் சில தேற்றங்களை நிறுவுவோம். முதலில் குறுங்கோணத்தாலாய தேற்றங்களை நிறுவி, பின்பு அவை எல்லா மதிப்புடைய கோணங்களுக்கும் பொருந்துமெனக் காட்டுவோம்.

44. $\angle A$, $\angle B$, $\angle A+B$, **குறுங்கோணமாயின்**

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B.$$

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B.$$

AOB $= \angle A$ என்றும், **BOC** $= \angle B$ என்றும் வைத்துக்கொண்டால் $\angle AOC = A+B$. **OC** கோட்டில், **P** புள்ளியிலிருந்து **PM, PN** என்பவற்றை முறையே **OA, OB** என்பவற்றிற்குக் குத்துக் கோடுகளாக வரைக. மேலும் **NH, NK** என்பவைகளையும் முறையே **OA, PM** என்பவைகளுக்குக் குத்துக் கோடுகளாக வரைக.



படம் 38

ONP, OMP ஒவ்வொன்றும் செங்கோண மாகையால் **OMNP** என்பது ஒரு வட்ட நாற்சிறையாகும் (cyclic quadrilateral).

$$\therefore \quad KPN = AOB = A.$$

OMP முக்கோணத்தில்

$$\sin(A+B) = \frac{MP}{OP} = \frac{MK+KP}{OP} = \frac{HN+KP}{OP}.$$

$$= \frac{HN}{OP} + \frac{KP}{OP}.$$

$$= \frac{HN}{ON}\cdot\frac{ON}{OP} + \frac{KP}{NP}\cdot\frac{NP}{OP}.$$

$\triangle$ ONH-ல் $\sin A = \frac{HN}{ON}$; $\cos A = \frac{OH}{ON}$.

$\triangle$ ONP-ல் $\cos B = \frac{ON}{OP}$, $\sin B = \frac{NP}{OP}$.

$\triangle$ PKN-ல் $\cos A = \frac{KP}{PN}$; $\sin A = \frac{KN}{PN}$.

$$\therefore \quad \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B.$$

மேலும் OMP முக்கோணத்தில்

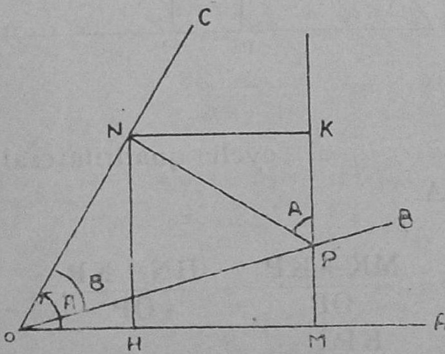
$$\cos(A+B) = \frac{OM}{OP} = \frac{OH - MH}{OP}.$$
$$= \frac{OH}{OP} - \frac{MH}{OP}.$$
$$= \frac{OH}{OP} - \frac{KN}{OP}.$$
$$= \frac{OH}{ON} \cdot \frac{ON}{OP} - \frac{KN}{PN} \cdot \frac{PN}{OP}.$$
$$= \cos A \cos B - \sin A \sin B.$$

$$\therefore \quad \cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B.$$

45. $\angle A$, $\angle B$ **குறுங்கோணங்களாகவும்** $\angle B > \angle A$ **ஆகவும் இருப்பின்**

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$
$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

AOB = A என்றும், **BOC = B** என்றும் வைத்துக்கொண்டால் **AOC = A − B.** OC கோட்டில், **P** புள்ளியிலிருந்து **PM, PN** இரண்டையும் முறையே **OA, OB** என்பவற்றிற்குக் குத்துக் கோடுகளாகவும், **NH, NK** என்பவற்றை முறையே **OA, MP** என்பவற்றிற்குக் குத்துக் கோடுகளாகவும் வரைக.



படம் 39

அப்பொழுது

ONP = 90°, OMP = 90°.

ஆகையால் **OMPN** ஒரு வட்ட நாற்சிறை,

OPM என்ற முக்கோணத்திலிருந்து நமக்குக் கிடைப்பது

$$\sin(A-B)=\frac{MP}{OP}=\frac{MK-PK}{OP}=\frac{HN-PK}{OP}.$$

$$=\frac{HN}{OP}-\frac{PK}{OP}.$$

$$=\frac{HN}{ON}\cdot\frac{ON}{OP}-\frac{PK}{PN}\cdot\frac{PN}{OP}.$$

$\triangle$ **OHN**-ல் $\frac{HN}{ON}=\sin A,\ \frac{OH}{ON}=\cos A.$

$\triangle$ **OPN**-ல் $\frac{PN}{ON}=\sin B,\ \frac{ON}{OP}=\cos B.$

$\triangle$ **PKN**-ல் $\frac{PK}{PN}=\cos A,\ \frac{NK}{PN}=\sin A.$

$$\therefore\quad \sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B.$$

மேலும் $\cos(A-B)=\frac{OM}{OP}=\frac{OH+HM}{OP}=\frac{OH+NK}{OP}$

$$=\frac{OH}{OP}+\frac{NK}{OP}$$

$$=\frac{OH}{ON}\cdot\frac{ON}{OP}+\frac{NK}{PN}\cdot\frac{PN}{OP}$$

$$=\cos A\cos B+\sin A\sin B$$

$$\therefore\quad \cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B.$$

46. மேற்காட்டிய வடிவ கணிதத் தெரிப்புகளில், **A, B, A+B** கோணங்கள் ஒவ்வொன்றும் ஒரு செங்கோணத்திலும் குறைந்தது. அஃதன்றியும் **(A − B)** கோணம் ஒரு மிகைக் கோணம். அக் கோணங்கள் குறுங்கோணமாக இல்லையாயின் மேற்கொடுத்திருக்கும் படங்களில் சில மாற்றங்கள் அமைக்கவேண்டிவரும். வேறு படங்கள் வரையாமல் இத் தேற்றங்கள் எல்லா மதிப்புடைய கோணங்களுக்கும் பொருந்துமென நிறுவலாம்.

$\angle A$, $\angle B$, குறுங்கோணமாயின்

$$\sin(A-B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

என்பவற்றை நிறுவினோம்.

$A_1 = 90^\circ + A$ என்று வைத்துக்கொண்டால்

$$\sin A_1 = \sin(90^\circ + A) = \cos A$$
$$\cos A_1 = \cos(90^\circ + A) = -\sin A$$

ஆகவே
$$\begin{aligned}\sin(A_1+B) &= \sin(90^\circ + A + B)\\ &= \cos(A+B)\\ &= \cos A \cos B - \sin A \sin B\\ &= \sin(90^\circ + A)\cos B\\ &\qquad + \cos(90^\circ + A)\sin B\\ &= \sin A_1 \cos B + \cos A_1 \sin B\end{aligned}$$

இவ்வாறே $\cos(A_1 + B) = \cos A_1 \cos B - \sin A_1 \sin B.$

இவ்விதமே $\angle$ B-யோடு 90° கூட்டினல்

$$\sin(A_1 + B_1) = \sin A_1 \cos B_1 + \cos A_1 \sin B_1$$
$$\cos(A_1 + B_1) = \cos A_1 \cos B_1 - \sin A_1 \sin B_1$$

என நிறுவலாம். ஆகையால் இத் தேற்றங்கள் A, B என்பவை 0°-க்கும் 180°-க்கும் இடையில் இருக்கும்பொழுது உண்மையாக இருக்கின்றன. இவ்வாறே இத் தேற்றங்கள் எவ்வித மதிப்புடைய கோணங்களுக்கும் பொருந்துமெனக் காட்டலாம்.

பயிற்சி 1. $\cos 75^\circ$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

$$\begin{aligned}\cos 75^\circ &= \cos(45^\circ + 30^\circ)\\ &= \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}\\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

பயிற்சி 2. $\cos 15^\circ$-ன் மதிப்பு என்ன ?

$$\begin{aligned}\cos 15^\circ &= \cos(90^\circ - 75^\circ) = \sin 75^\circ\\ &= \sin(45^\circ + 30^\circ)\\ &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}\\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

பயிற்சி 3. A-யும், B-யும் குறுங்கோணங்கள் ; $\sin A = \frac{3}{5}$, $\sin B = \frac{1}{2}$ எனின் $\sin(A+B)$-ன் மதிப்பு என்ன ?

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B.$$

$$\cos A = \sqrt{(1-\sin^2 A)} = \sqrt{(1-\tfrac{9}{25})} = \tfrac{4}{5}$$

$$\cos B = \sqrt{(1-\sin^2 B)} = \sqrt{(1-\tfrac{1}{4})} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \quad \sin(A+B) = \frac{3}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}+4}{10}.$$

பயிற்சி 4. $\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$

$\cos(A+B)\cos(A-B) = \cos^2 A - \sin^2 B$

என்று நிறுவுக.

$$\begin{aligned}\sin(A+B)\sin(A-B) &= (\sin A\cos B + \cos A\sin B)\times\\ &\quad(\sin A\cos B - \cos A\sin B).\\ &= \sin^2 A\cos^2 B - \cos^2 A\sin^2 B\\ &= \sin^2 A(1-\sin^2 B) - (1-\sin^2 A)\sin^2 B\\ &= \sin^2 A - \sin^2 B\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(A+B)\cos(A-B) &= (\cos A\cos B - \sin A\sin B)\times\\ &\quad(\cos A\cos B + \sin A\sin B)\\ &= \cos^2 A\cos^2 B - \sin^2 A\sin^2 B\\ &= \cos^2 A(1-\sin^2 B) - (1-\cos^2 A)\sin^2 B\\ &= \cos^2 A - \sin^2 B\end{aligned}$$

பயிற்சி 5. $\cos A + \cos(120^\circ + A) + \cos(120^\circ - A) = 0$ என்று நிறுவுக.

$$\begin{aligned}&\cos A + \cos(120^\circ + A) + \cos(120^\circ - A)\\ &= \cos A + \cos 120^\circ\cos A - \sin 120^\circ\sin A\\ &\qquad + \cos 120^\circ\cos A + \sin 120^\circ\sin A\\ &= \cos A + 2\cos 120^\circ\cos A\\ &= \cos A + 2\times -\tfrac{1}{2}\times\cos A\\ &= 0\end{aligned}$$

பயிற்சி 8. $\sin(A+B+C)$-ன் விரிவைக் காண்க.

$$\begin{aligned}\sin(A+B+C) &= \sin(A+B)\cos C + \cos(A+B)\sin C\\ &= (\sin A\cos B + \cos A\sin B)\cos C +\\ &\quad (\cos A\cos B - \sin A\sin B)\sin C.\\ &= \sin A\cos B\cos C + \sin B\cos C\cos A\\ &\quad + \sin C\cos A\cos B - \sin A\sin B\sin C\end{aligned}$$

இதனல் $\sin 3A$-யின் விரிவைக் காணலாம்.

$A=B=C$ என்று கொண்டால்

$$\begin{aligned}\sin(A+A+A) &= \sin A\cos A\cos A + \sin A\cos A\cos A\\ &\quad + \sin A\cos A\cos A - \sin A\sin A\sin A\\ &= 3\sin A\cos^2 A - \sin^3 A\\ &= 3\sin A(1-\sin^2 A) - \sin^3 A\\ &= 3\sin A - 4\sin^3 A\end{aligned}$$

பயிற்சிகள் 9

பின் வருவனவற்றை நிறுவுக.

1. $\sin(A+45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin A + \cos A)$.
2. $\sqrt{2}\cos(A+45°) = \cos A - \sin A$.
3. $2\sin(30° - A) = \cos A - \sqrt{3}\sin A$.
4. $2\cos(30° - A) = \sqrt{3}\cos A + \sin A$.
5. $\sin(45° + A) - \cos(45° - A) = 0$.
6. $\sin(30° + A) + \sin(30° - A) = \cos A$.
7. $\cos(30° - A) - \cos(30° + A) = \sin A$.
8. $\sin A = \frac{3}{5}$, $\cos B = \frac{12}{13}$ ஆகவும்; A, B என்பவை குறுங் கோணமாகவும் இருந்தால் $\sin(A+B) = \frac{56}{65}$.
9. $\cos 2A = \sin(n+1)A\sin(n-1)A + \cos(n+1)A\cos(n-1)A$.
10. $\cos A = \sin(n+1)A\ \sin(n+2)A + \cos(n+1)A\ \sin(n+2)A$.
11. $\cos(A+B)\cos(A-B) = \cos^2 B - \sin^2 A$.
12. $\sin(A+B)\sin(A-B) = \cos^2 B - \cos^2 A$.
13. $\cos 25° + \cos 95° + \cos 145° = 0$.
14. $\cos 52° + \cos 68° + \cos 172° = 0$.
15. $\sin A + \sin(120° + A) + \sin(240° + A) = 0$.

16. $\cos\frac{\theta}{3} + \cos\frac{2\pi+\theta}{3} + \cos\frac{4\pi+\theta}{3} = 0.$

17. $\cos^2 15^\circ + \cos^2 45^\circ + \cos^2 75^\circ = \frac{3}{2}.$

18. $\cos(30^\circ + A) + \cos(60^\circ + A) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{3})\sin(45^\circ - A).$

19. $\frac{\sin(A+B)+\sin(A-B)}{\cos(A+B)+\cos(A-B)} = \tan A.$

20. $\sin(B+C)\sin(B-C) + \sin(C+A)\sin(C-A) +$
$\sin(A+B)\sin(A-B) = 0.$

21. $\frac{\sin(B-C)}{\cos B\cos C} + \frac{\sin(C-A)}{\cos C\cos A} + \frac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B} = 0.$

22. $\cot A - \cot(A+B) = \sin B \operatorname{cosec} A \operatorname{cosec}(A+B).$

23. $a\cos(x+\theta) = b\cos(x-\theta)$ என்றால் $\tan x = \frac{a-b}{a+b}\cot\theta.$

24. $\cos(A+B\mp C)$-ன் விரிவைக் கண்டு அதிலிருந்து
$\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$ என்று நிறுவுக.

25. A, B, C ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்களாக இருப்பின் பின் வருவனவற்றை நிறுவுக.

(1) $\cos A + \cos(B-C) = 2\sin B\sin C.$

(2) $\cos\frac{A}{2} + \sin\frac{B-C}{2} = 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$

(3) $\cos\frac{(A+B-C)}{2}\sin(A+B)$

$$-\sin\left(\frac{A+B-C}{2}\right)\cos(A+B) = 1.$$

(4) $\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B+C}{2} = \sec\frac{A}{2}\sec\frac{B+C}{2}.$

47. $\tan(A+B) = \frac{1-\tan A\tan B}{\tan A+\tan B}$

$\tan(A-B) = \frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$

$$\tan(A+B) = \frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}$$

$$= \frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B-\sin A\sin B}.$$

இப் பின்னத்தை இருக்கையின் சார்பலனுகக் கூறுவதற்குப் பின்ன மேல் எண்ணையும் (**numerator**), பின்னக் கீழ் எண்ணையும் (**denominator**) **cos A cos B** ஆல் வகுத்தல் வேண்டும்.

$$\therefore \quad \tan(A+B) = \frac{\dfrac{\sin A}{\cos A} + \dfrac{\sin B}{\cos B}}{1 - \dfrac{\sin A}{\cos A} \cdot \dfrac{\sin B}{\cos B}}$$

$$= \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

மேலும் $\tan(A-B) = \dfrac{\sin(A-B)}{\cos(A-B)}$

$$= \frac{\sin A \cos B - \cos A \sin B}{\cos A \cos B + \sin A \sin B}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin A}{\cos A} - \dfrac{\sin B}{\cos B}}{1 + \dfrac{\sin A}{\cos A} \dfrac{\sin B}{\cos B}}$$

$$= \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}.$$

48. $\tan(A+B) = \dfrac{1 - \tan A \tan B}{\tan A \tan B}$ **என்பதற்கு வடிவ கணிதத் தெரிப்பு.**

படம் 38-ஐப் பார்க்கவும்.

$$\tan(A+B) = \frac{MP}{OM} = \frac{KP+MK}{OH-MH}$$

$$= \frac{KP+HN}{OH-KN}$$

$$= \frac{\dfrac{KP}{OH} + \dfrac{HN}{OH}}{1 - \dfrac{KN}{OH}}$$

$$= \frac{\dfrac{KP}{OH} + \dfrac{HN}{OH}}{1 - \dfrac{KN}{KP} \cdot \dfrac{KP}{OH}}.$$

ONH, PKN வடிவொத்த முக்கோணங்களாதலால்

$$\frac{KP}{OH} = \frac{PN}{ON} = \tan B.$$

மேலும், △ OHN-லிருந்து

$\frac{HN}{OH} = \tan A$ என்றும், △ PKN-லிருந்து $\frac{KN}{KP} = \tan A$ என்றும் கிடைக்கின்றன.

$$\therefore \quad \tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

இவ்வாறே 39-வது படத்தைப் பயன்படுத்தி $\tan(A-B)$வின் விரிவிற்கும் வடிவ கணிதத் தெரிப்பு காணலாம்.

பயிற்சி 7. tan 75°-யின் மதிப்பு என்ன ?

$$\tan 75^\circ = \tan(45^\circ + 30^\circ)$$

$$= \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2}$$

$$= 2 + \sqrt{3}$$

பயிற்சி 8. A, B என்ற கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 45° ஆக இருப்பின் $(1+\tan A)(1+\tan B) = 2$ என்று நிறுவுக.

$$A + B = 45^\circ$$

ஆகவே $\tan(A+B) = \tan 45^\circ = 1$

$$\therefore \quad \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = 1.$$

(அ-து) $\tan A + \tan B = 1 - \tan A \tan B$

(அ-து) $1 + \tan A + \tan B + \tan A \tan B = 2$

(அ-து) $(1 + \tan A)(1 + \tan B) = 2.$

பயிற்சி 9. $\tan\theta+\tan\Phi=a$ என்றும் $\cot\theta+\cot\Phi=b$ என்றும் இருப்பின் $\cot(\theta+\Phi)=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$ என்று நிறுவுக.

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{\tan\theta+\tan\Phi}-\frac{1}{\cot\theta+\cot\Phi}$$

$$=\frac{1}{\tan\theta+\tan\Phi}-\frac{1}{\frac{1}{\tan\theta}+\frac{1}{\tan\Phi}}$$

$$=\frac{1}{\tan\theta+\tan\Phi}-\frac{\tan\theta\ \tan\Phi}{\tan\theta+\tan\Phi}$$

$$=\frac{1-\tan\theta\ \tan\Phi}{\tan\theta+\tan\Phi}$$

$$=\frac{1}{\tan(\theta+\Phi)}=\cot(\theta+\Phi).$$

பயிற்சிகள் 10

கீழே கொடுத்திருப்பவற்றை நிறுவுக,

1. $\tan A=\frac{5}{6}$, $\tan B=\frac{1}{11}$ என்றிருப்பின் $A+B=45°$.
2. $\tan\theta=\frac{1}{2}$, $\tan\Phi=\frac{1}{3}$ என்றிருப்பின் $\theta+\Phi=\frac{\pi}{4}$.
3. $\tan A=\frac{m-1}{m}$, $\tan B=\frac{1}{2m-1}$ எனின் $\tan(A+B)=1$.
4. $\tan A=\frac{m}{m+1}$, $\tan B=\frac{1}{2m+1}$ எனின் $\tan(A+B)=1$.
5. $\tan 15°=2-\sqrt{3}$.
6. $\tan(45°+A)=\frac{1+\tan A}{1-\tan A}$.
7. $\tan(45°-A)=\frac{1-\tan A}{1+\tan A}$.
8. $\frac{\tan 4\alpha-\tan 3\alpha}{1+\tan 3\alpha\tan 4\alpha}=\tan\alpha$.
9. $\tan\left(\frac{\pi}{4}+A\right)\tan\left(\frac{3\pi}{4}+A\right)=-1$.
10. $\cot(45°+B)\cot(45°-B)=1$.
11. $\cot(A+B)=\frac{\cot A.\cot B-1}{\cot A+\cot B}$.

12. $\cot(A-B) = \dfrac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$.

13. $\dfrac{\cot(A+B)\cot A + 1}{\cot A - \cot(A+B)} = \cot B$.

14. $\dfrac{\tan(A-B) + \tan B}{1 - \tan(A-B)\tan B} = \tan A$.

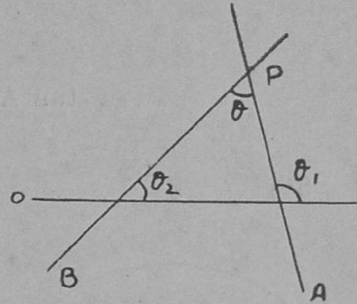
15. $\tan A - \tan B = x$ என்றும், $\cot B - \cot A = y$ என்றும்

இருப்பின் $\cot(A-B) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$.

16. படம் 40-ல் $\tan\theta_1 = m_1$, $\tan\theta_2 = m_2$ என்று கொடுத்திருப்பின்

$$\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

இதனல் AP, BP கோடுகள் (1) குத்துக்கோடுகளாக இருக்கவேண்டுமானல் $m_1 m_2 = -1$ என்றும், (2) ஒரு போகு கோடுகளாக இருக்கவேண்டுமானல் $m_1 = m_2$ என்றும் நிறுவுக.



படம் 40

17. $\tan(A+B+C)$

$$= \frac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C}{1 - \tan A \tan B - \tan B \tan C - \tan C \tan A}$$

மடங்கு கோணங்கள் (Multiple angles)

49. 2A-யின் தகவுகள் :—

$$\sin 2A = \sin(A+A)$$
$$= \sin A \cos A + \cos A \sin A$$
$$= 2 \sin A \cos A$$

$$\cos 2A = \cos(A+A)$$
$$= \cos A \cdot \cos A - \sin A \cdot \sin A.$$
$$= \cos^2 A - \sin^2 A$$

$\therefore \quad \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A.$

$$\tan 2A = \tan(A+A)$$

$$= \frac{\tan A + \tan A}{1 - \tan A . \tan A}.$$

$$= \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}.$$

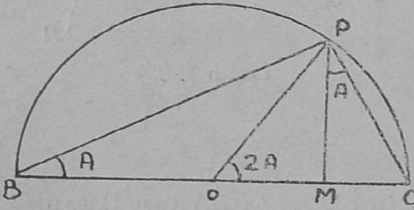
cos 2A-யின் விரிவிலிருந்து பின் வரும் முற்றொருமைகள் காணலாம்.

$$\sin^2 A = \frac{1 - \cos 2A}{2}$$

$$\cos^2 A = \frac{1 + \cos 2A}{2}$$

$$\tan^2 A = \frac{1 - \cos 2A}{1 + \cos 2A}$$

50. A குறுங்கோணமாயின் மேல் குறிப்பிட்ட வாய்பாடுகளை வடிவ கணித முறைப்படியும் நிறுவலாம்.



படம் 41

BPC என்பதை அரைவட்டமாகவும், BC-ஐ அதன் விட்டமாகவும், O-ஐ அதன் மையமாகவும், CBP-ஐ ∠A ஆகவும் கொள்வோம். P-லிருந்து BC-க்கு PM குத்துக்கோடு வரைக.

அப்பொழுது $MPC = 90^\circ - BPM = PBC = A$.

மேலும் $POC = 2\ PBC = 2\ A$.

$$\therefore \sin 2A = \frac{MP}{OP} = \frac{2\ MP}{2\ OP} = \frac{2\ MP}{BC}.$$

$$= 2\ \frac{MP}{BP} . \frac{BP}{BC}.$$

$$= 2 \sin A \cos A.$$

$$\cos 2A = \frac{OM}{OP} = \frac{2\,OM}{2\,OP} = \frac{2\,OM}{BC}.$$

$$= \frac{BM - MC}{BC} = \frac{BM}{BC} - \frac{MC}{BC}.$$

$$= \frac{BM}{BP}.\frac{BP}{BC} - \frac{MC}{PC}.\frac{PC}{BC}.$$

$$= \cos A.\cos A - \sin A.\sin A.$$

$$= \cos^2 A - \sin^2 A.$$

$$\tan 2A = \frac{MP}{OM} = \frac{2\,MP}{2\,OM} = \frac{2\,MP}{BM - MC}.$$

$$= \frac{2\frac{MP}{BM}}{1 - \frac{MC}{BM}} = \frac{\frac{2\,MP}{BM}}{1 - \frac{MC}{MP}.\frac{MP}{BM}}.$$

$$= \frac{2\tan A}{1 - \tan A \tan A} = \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}.$$

பயிற்சி 10. $\cos 4a$-ஐ $\sin a$-வின் மூலமாக எழுதுக.

$$\cos 4a = 1 - 2\sin^2 2a$$

$$= 1 - 2(2\sin a\cos a)^2$$

$$= 1 - 8\sin^2 a\cos^2 a$$

$$= 1 - 8\sin^2 a(1 - \sin^2 a)$$

$$= 1 - 8\sin^2 a + 8\sin^4 a$$

பயிற்சி 11. $\cot A + \tan A = 2\operatorname{cosec} 2A$ என்று நிறுவுக.

$$\cot A + \tan A = \frac{1}{\tan A} + \tan A$$

$$= \frac{1 + \tan^2 A}{\tan A} = \frac{\sec^2 A}{\sin A}\cos A.$$

$$= \frac{1}{\sin A \cos A} = \frac{2}{\sin 2A} = 2\operatorname{cosec} 2A.$$

51. Sin 2A, cos 2A என்பவற்றை **tan A**-யின் மூலமாகக் காணுதல்.

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A.$$

$$= 2\frac{\sin A.\cos^2 A}{\cos A}.$$

$$= \frac{2\tan A}{\sec^2 A} = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}.$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A.$$

$$= \cos^2 A\,(1-\tan^2 A)$$

$$= \frac{1-\tan^2 A}{\sec^2 A}.$$

$$= \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}.$$

பயிற்சி 12. $\frac{1-\tan^2(45^\circ-\theta)}{1+\tan^2(45^\circ-\theta)} = \sin 2\theta$ என்று காட்டுக.

$$\frac{1-\tan^2(45^\circ-\theta)}{1+\tan^2(45^\circ-\theta)} = \cos 2\,(45^\circ-\theta)$$

$$= \cos(90^\circ-2\theta)$$

$$= \sin 2\theta$$

பயிற்சி 13. $\frac{\cos 2A}{1+\sin 2A} = \tan(45^\circ-A)$ என்று காட்டுக.

cos 2A, sin 2A என்பவற்றின் **tan A** மூலமுள்ள மதிப்புகளை ஈடாகக் கொடுப்பின்

$$\frac{\cos 2A}{1+\sin 2A} = \frac{(1-\tan^2 A)\div(1+\tan^2 A)}{1+\dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}}$$

$$= \frac{1-\tan^2 A}{1+2\tan A+\tan^2 A} = \frac{(1-\tan A)(1+\tan A)}{(1+\tan A)^2}$$

$$= \frac{1-\tan A}{1+\tan A} = \frac{\tan 45^\circ-\tan A}{1+\tan 45^\circ\tan A}$$

$$= \tan(45^\circ-A).$$

52. A-ன் தகவுகளை $\frac{1}{2}$A-ன் தகவுகளின் மூலமாகக் கூறலாம்.

$$\sin A = \sin (2 \times \tfrac{1}{2} A) = 2 \sin \tfrac{1}{2} A . \cos \tfrac{1}{2} A.$$

$$\cos A = \cos (2 \times \tfrac{1}{2} A) = \cos^2 \tfrac{1}{2} A - \sin^2 \tfrac{1}{2} A.$$

$$= 2 \cos^2 \tfrac{1}{2} A - 1.$$

$$= 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} A - 1.$$

$$\tan A = \tan (2 \times \tfrac{1}{2} A) = \frac{2 \tan \frac{1}{2} A}{1 - \tan^2 \frac{1}{2} A}.$$

$$\sin A = \frac{2 \tan \frac{1}{2} A}{1 + \tan^2 \frac{1}{2} A}.$$

$$\cos A = \frac{1 - \tan^2 \frac{1}{2} A}{1 + \tan^2 \frac{1}{2} A}.$$

இத்தொடர்களிலிருந்து பின் வரும் முற்றொருமைகளை எளிதிற் காணலாம்.

$$\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{2},$$

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{1 + \cos A}{2},$$

$$\tan^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}.$$

பயிற்சி 14.

$\tan x = \cos \omega \tan y$ எனின் $\sin (y - x) = \tan^2 \frac{\omega}{2} \sin (y + x)$ என்று நிறுவுக.

$$\tan x = \cos \omega \tan y.$$

(அ-து) $$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1 - \tan^2 \frac{\omega}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\omega}{2}} . \frac{\sin y}{\cos y}.$$

(அ-து) $$\sin x \cos y \left(1 + \tan^2 \frac{\omega}{2}\right) = \left(1 - \tan^2 \frac{\omega}{2}\right) \cos x \sin y.$$

(அ-து) $$\tan^2 \frac{\omega}{2} (\sin x \cos y + \cos x \sin y) = \sin y \cos x - \sin x \cos y.$$

(அ-து) $$\tan^2 \frac{\omega}{2} \sin (y + x) = \sin (y - x).$$

பயிற்சி 15.

$\tan\left(45^\circ - \frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{b}{a}}$ எனின் $\sin\theta = \frac{a-b}{a+b}$ என்று நிறுவுக.

$$\tan\left(45^\circ - \frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

(அ-து) $$\frac{\tan 45^\circ - \tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan 45^\circ \tan\frac{\theta}{2}} = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$\frac{1-\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan\frac{\theta}{2}} = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$\frac{\left(1-\tan\frac{\theta}{2}\right)^2}{\left(1+\tan\frac{\theta}{2}\right)^2} = \frac{b}{a}.$$

$$\frac{\left(1-\tan\frac{\theta}{2}\right)^2 + \left(1+\tan\frac{\theta}{2}\right)^2}{\left(1-\tan\frac{\theta}{2}\right)^2 - \left(1+\tan\frac{\theta}{2}\right)^2} = \frac{b+a}{b-a}.$$

$$\frac{2+2\tan^2\frac{\theta}{2}}{-4\tan\frac{\theta}{2}} = \frac{b+a}{b-a}.$$

(அ-து) $$\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{a-b}{a+b}.$$

$$\therefore \quad \sin\theta = \frac{a-b}{a+b}.$$

பயிற்சி 16.

$$(1-e)\tan^2\frac{\theta}{2}=(1+e)\tan^2\frac{\Phi}{2} \text{ என்றால்}$$

$(1+e\cos\theta)(1-e\cos\Phi)=1-e^2$ என்று நிறுவுக.

$(1+e\cos\theta)(1-e\cos\Phi)$.

$$=\left(1+e\,\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}\right)\left(1-e\,\frac{1-\tan^2\frac{\Phi}{2}}{1+\tan^2\frac{\Phi}{2}}\right)$$

$$=\left\{\frac{(1+e)+(1-e)\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}\right\}\left\{\frac{(1-e)+(1+e)\tan^2\frac{\Phi}{2}}{1+\tan^2\frac{\Phi}{2}}\right\}$$

$$=\left\{\frac{(1+e)+(1+e)\tan^2\frac{\Phi}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}\right\}\left\{\frac{(1-e)+(1-e)\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\Phi}{2}}\right\}$$

$$=\frac{(1+e)\left(1+\tan^2\frac{\Phi}{2}\right)(1-e)\left(1+\tan^2\frac{\theta}{2}\right)}{\left(1+\tan^2\frac{\theta}{2}\right)\left(1+\tan^2\frac{\Phi}{2}\right)}$$

$$=1-e^2.$$

பயிற்சி 17.

$$\cos\theta=\frac{\cos u-e}{1-e\cos u} \text{ எனின் } \tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{u}{2}$$

என்று நிறுவுக.

$$\cos\theta=\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} \text{ என்று நிறுவினேம்.}$$

ஆகவே $\dfrac{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}} = \dfrac{\cos u-e}{1-e\cos u}$

(அ-து) $\left(1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}\right)(1-e\cos u)=\left(1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}\right)(\cos u-e)$

(அ-து) $\tan^2\dfrac{\theta}{2}(e\cos u-1-\cos u+e)=\cos u-e-1+e\cos u.$

(அ-து) $\tan^2\dfrac{\theta}{2}(e-1)\ (1+\cos u)=(1+e)\ (\cos u-1)$

$\therefore\quad \tan^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1+e}{1-e}\cdot\dfrac{1-\cos u}{1+\cos u}$

$=\dfrac{1+e}{1-e}\tan^2\dfrac{u}{2}.$

ஆகவே $\tan\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}}\cdot\ \tan\dfrac{u}{2}.$

பயிற்சி 18.

$\sin^4\dfrac{\pi}{8}+\sin^4\dfrac{3\pi}{8}+\sin^4\dfrac{5\pi}{8}+\sin^4\dfrac{7\pi}{8}=\dfrac{3}{2}$ என்று நிறுவுக.

$2\sin^2\dfrac{A}{2}=1-\cos A$ என்றிருப்பதால் $2\sin^2\dfrac{\pi}{8}=1-\cos\dfrac{\pi}{4}$

$\therefore\quad \sin^4\dfrac{\pi}{8}=\frac{1}{4}\left(1-\cos\dfrac{\pi}{4}\right)^2$

இவ்வாறே $\sin^4\dfrac{3\pi}{8}=\frac{1}{4}\left(1-\cos\dfrac{3\pi}{4}\right)^2$

ஆனல் $\cos\dfrac{3\pi}{4}=\cos\left(\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\cos\dfrac{\pi}{4}.$

$\therefore\quad \sin^4\dfrac{3\pi}{8}=\frac{1}{4}\left(1+\cos\dfrac{\pi}{4}\right)^2.$

இவ்வாறே $\sin^4\dfrac{5\pi}{8}=\frac{1}{4}\left(1+\cos\dfrac{\pi}{4}\right)^2$

$\sin^4\dfrac{7\pi}{8}=\frac{1}{4}\left(1-\cos\dfrac{\pi}{4}\right)^2$

$$\therefore \quad \sin^4 \frac{\pi}{8} + \sin^4 \frac{3\pi}{8} + \sin^4 \frac{5\pi}{8} + \sin^4 \frac{7\pi}{8}$$

$$= \tfrac{1}{4} \left\{ \left(1 - \cos \frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(1 + \cos \frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(1 + \cos \frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(1 - \cos \frac{\pi}{4}\right)^2 \right\}$$

$$= \tfrac{1}{2} \left\{ \left(1 - \cos \frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(1 + \cos \frac{\pi}{4}\right)^2 \right\}$$

$$= 1 + \cos^2 \frac{\pi}{4}$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2}.$$

பயிற்சி 19.

$\cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} = \frac{1}{8}$ என்று நிறுவுக.

கோவையை $2 \sin \frac{2\pi}{7}$-ஐக் கொண்டு பெருக்குக.

$$2 \sin \frac{2\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7}$$

$$= \sin \frac{4\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7}$$

$$= \tfrac{1}{2} \sin \frac{8\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7}$$

$$= \tfrac{1}{2} \sin \left(2\pi - \frac{6\pi}{7}\right) \cos \frac{6\pi}{7}$$

$$= \tfrac{1}{2} \sin \frac{6\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7}$$

$$= \tfrac{1}{4} \sin \frac{12\pi}{7}$$

$$= \tfrac{1}{4} \sin \left(2\pi - \frac{2\pi}{7}\right)$$

$$= \tfrac{1}{4} \sin \frac{2\pi}{7}$$

$$\cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} = \tfrac{1}{8}.$$

பயிற்சிகள் 19

பின் வருவனவற்றை நிறுவுக.

1. $\cos^4 A - \sin^4 A = \cos 2A.$

2. $\left(\sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2}\right)^2 = 1 + \sin \theta$

3. $\left(\sin \frac{\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{2}\right)^2 = 1 - \sin \theta.$

4. $\sin 4A = 4 \sin A \cos A (\cos^2 A - \sin^2 A).$

5. $\cos 4A = 8 \cos^4 A - 8 \cos^2 A + 1.$

6. $\frac{\sin 2A}{1 + \cos 2A} = \tan A.$

7. $\frac{\sin 2A}{1 - \cos 2A} = \cot A.$

8. $\frac{\sec \theta - 1}{\sec \theta} = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}.$

9. $\sec 2\theta = \frac{\cot^2\theta + 1}{\cot^2\theta - 1}.$

10. $\frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} = \frac{1 + \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan \frac{\theta}{2}}.$

11. $\frac{1 + \sin A - \cos A}{1 + \sin A + \cos A} = \tan \frac{A}{2}$

12. $\frac{\sin A + \sin 2A}{1 + \cos A + \cos 2A} = \tan A.$

13. $\cos^6 A + \sin^6 A = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2A.$

14. $\sin 2A + \cos 2A = \frac{(\cot A + 1)^2 - 2}{1 + \cot^2 A}.$

15. $\tan (45^\circ + \theta) - \tan (45^\circ - \theta) = 2 \tan 2\theta.$

16. $\tan (45^\circ + \theta) + \tan (45^\circ - \theta) = 2 \sec 2\theta.$

17. $\tan A = \cot A - 2 \cot 2A.$

18. $\tan 20^\circ + 2 \tan 40^\circ + 4 \tan 80^\circ = 9 \cot 20^\circ$.

19. $\tan 2A - \tan A = \tan A \sec 2A$.

20. $\cot A - \cot 2A = \operatorname{cosec} 2A$.

21. $\dfrac{1+\sin A}{1-\sin A} = \tan^2\left(45^\circ + \dfrac{A}{2}\right)$

22. $\tan A + \sec A = \tan\left(45^\circ + \dfrac{A}{2}\right)$.

23. $\cot A \cot B - \tan A \tan B = \dfrac{2(\cos 2B + \cos 2A)}{\sin 2A \sin 2B}$

24. $\tan A \cot B - \cot A \tan B = \dfrac{2(\cos 2B - \cos 2A)}{\sin 2A \sin 2B.}$

25. $2\cos\theta = a + \dfrac{1}{a}$ எனின் $2\cos 2\theta = a^2 + \dfrac{1}{a^2}$

26. $\cos A + \sin A = a$, $\cos 2A = b$ எனின் $a^4 + b^2 = 2a^2$.

27. $2\sin A = \sin(A+B)$ எனின் $\cot A = \operatorname{cosec} B + \tan\dfrac{B}{2.}$

28. $\tan\theta = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 + \tan A \tan B}$ எனின் $\sin 2\theta = \dfrac{\sin 2A + \sin 2B}{1 + \sin 2A \sin 2B}$

29. $\sin\theta = \dfrac{\sin A \sin B}{1 + \cos A \cos B}$ எனின் $\tan\dfrac{\theta}{2} = \tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}$

அல்லது $\cot\dfrac{A}{2}\cot\dfrac{B}{2}$.

30. $\cos\theta = \dfrac{\cos A - \cos B}{1 - \cos A \cos B}$ எனின் $\tan\dfrac{\theta}{2} = \pm\tan\dfrac{A}{2}\cot\dfrac{B}{2}$.

31. $\cos\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{4}\cos\dfrac{\theta}{8}\ldots\ldots\cos\dfrac{\theta}{2^n} = \dfrac{\sin\theta}{2^n \sin\dfrac{\theta}{2^n}}$

32. $\cos^4\dfrac{\pi}{8} + \cos^4\dfrac{3\pi}{8} + \cos^4\dfrac{5\pi}{8} + \cos^4\dfrac{7\pi}{8} = \dfrac{3}{2}$.

33. $\sin^2\Phi = \left(\dfrac{\sin 2\Phi}{2}\right)^2 + \left\{\dfrac{1 - \sin(90^\circ - 2\Phi)}{2}\right\}^2$ *

* ஆருவது நூற்ருண்டில் ஆக்கப்பெற்ற "பஞ்ச சித்தாந்திகம்" என்னும் இந்திய நூலில் இக் கணக்கு காணப்படுகிறது.

53. 3A-வின் சார்பலன்கள்.

$$\sin 3A = \sin(2A + A).$$
$$= \sin 2A \cos A + \cos 2A \sin A.$$
$$= 2 \sin A \cos^2 A + (1 - 2 \sin^2 A) \sin A.$$
$$= 2 \sin A (1 - \sin^2 A) + (1 - 2 \sin^2 A) \sin A.$$
$$= \mathbf{3 \sin A - 4 \sin^3 A}.$$

$$\cos 3A = \cos(2A + A).$$
$$= \cos 2A \cos A - \sin A \sin 2A.$$
$$= (2 \cos^2 A - 1) \cos A - 2 \sin^2 A \cos A.$$
$$= (2 \cos^2 A - 1) \cos A - 2 (1 - \cos^2 A) \cos A.$$
$$= 4 \cos^3 A - 3 \cos A.$$

$$\tan 3A = \tan(2A + A).$$
$$= \frac{\tan 2A + \tan A}{1 - \tan A \tan 2A}.$$
$$= \frac{\frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} + \tan A}{1 - \tan A \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}}.$$
$$= \frac{2 \tan A + \tan A (1 - \tan^2 A)}{1 - \tan^2 A - 2 \tan^2 A}.$$
$$= \frac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A},$$

54. $\sin 18^\circ$, $\cos 36^\circ$ என்பனவற்றின் மதிப்புகளைக் காணுதல்

$\theta = 18^\circ$ என்று வைத்துக்கொள்வோம்.

$\therefore \quad 5\theta = 90^\circ.$

$\therefore \quad 2\theta = 90^\circ - 3\theta.$

$\therefore \quad \sin 2\theta = \sin(90^\circ - 3\theta)$

(அ-து) $\sin 2\theta = \cos 3\theta.$

(அ-து) $2 \cos\theta \sin\theta = 4 \cos^3\theta - 3 \cos\theta.$

(அ-து) $4 \cos^3\theta - 2 \cos\theta \sin\theta - 3 \cos\theta = 0.$

(அ-து) $\cos\theta (4 \cos^2\theta - 2 \sin\theta - 3) = 0.$

$\cos\theta = 0$ என்றிருக்கமுடியாது.

$\therefore \quad 4\cos^2\theta - 2\sin\theta - 3 = 0.$

(அ-து) $4(1-\sin^2\theta) - 2\sin\theta - 3 = 0.$

$\therefore \quad 4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1 = 0.$

$$\therefore \quad \sin\theta = -2 \pm \frac{\sqrt{4+16}}{8}.$$

$$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{8}.$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

θ குறுங்கோணமாதலால் அதன் மதிப்பு மிகைக்கணியமாகத்தான் இருக்கும். ஆகவே குறைக்குறியைப் பொருட்படுத்த வேண்டியதில்லை.

$$\therefore \quad \mathbf{\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}}.$$

மேலும் $\cos 36^\circ = \cos(2 \times 18^\circ).$

$$= 1 - 2\sin^2 18^\circ.$$

$$= 1 - 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2$$

$$= 1 - 2\,\frac{5 - 2\sqrt{5} + 1}{16}.$$

$$= \frac{4 + 4\sqrt{5}}{16}.$$

$$= \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

மேலும் $\cos 18^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 18^\circ}$

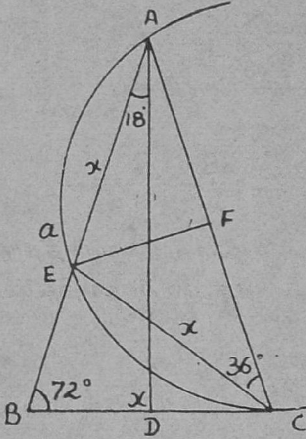
$$= \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{6 - 2\sqrt{5}}{16}}$$

$$= \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

55 sin 18°, cos 36° என்பனவற்றின் மதிப்புகளை வடிவ கணித முறைப்படிக் காணுதல்.

$\angle B = \angle C = 72^\circ$ என்றிருக்கும்படியாக **ABC** என்ற ஒரு இரு சரிச்சிறை முக்கோணம் (**Isosceles triangle**) வரைக. அப்பொழுது $\angle A = 36^\circ$. **A** வழி, **BC**-ஐ **C**-யில் தொடும் ஒரு வட்டம் வரைக. அவ்வட்டம் **AB**-ஐ **E**-ல் வெட்டுவதாக வைத்துக்கொள்வோம். **BC**-க்கு **AD**-ஐயும், **CA**-க்கு **EF**-ஐயும் குத்துக் கோடாக வரைக. $BA = a$ என்றும் $BC = x$ என்றும் வைத்துக்கொள்வோம்.



படம் 42

BCE = EAC (மாற்று வட்டப் பகுதியிலுள்ள கோணம்)

$$= 36^\circ$$

$$\therefore \quad BEC = 72^\circ$$

$$\therefore \quad BC = CE = AE = x.$$

AEC வட்டத்திற்கு **BC** தொடுவரையாகவும், **BA** வெட்டுவரையாகவும் (**secant**) இருப்பதால்

$$BC^2 = BE . BA.$$

$$(\text{அ-து}) \quad x^2 = (a - x)\, a$$

$$(\text{அ-து}) \quad x^2 + ax - a^2 = 0$$

$$\therefore \quad x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2}$$

$$= \frac{-a \pm a\sqrt{5}}{2}$$

AEC இருசரிச்சிறை முக்கோணத்தில், **AC**-க்கு **EF** குத்துக் கோடாக இருப்பதால்

$$AF = FC = \frac{a}{2}.$$

$$\therefore \quad \sin 18^\circ = \frac{DC}{AC} = \frac{\frac{x}{2}}{a} = \frac{-a \pm a\sqrt{5}}{4a} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

18° குறுங்கோணமாதலால் குறைக்குறியைத் தள்ளிவிடலாம்.

$$\therefore \quad \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\cos 36^\circ = \frac{CF}{CE} = \frac{a}{2x} = \frac{a}{2\left(\frac{-a \pm a\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{1}{-1 \pm \sqrt{5}}$$

36° குறுங்கோணமாதலால் குறைக் குறியை தள்ளிவிடலாம்.

$$\therefore \quad \cos 36^\circ = \frac{1}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

56. sin 3A, cos 3A என்பவைகளின் விரிவை வடிவ கணித மூலம் காணுதல்.

இந்தப் படத்தில்

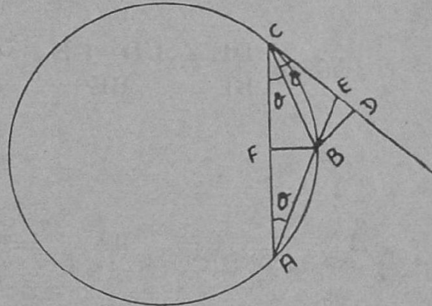
$CAB = ACB = BCE = \theta$.

$\therefore \quad BED = 3\theta$.

ACE, BCE என்ற முக்கோணங்களில்

CAE = BCE

ACE = CBE



படம் 43

ஆகையால் **ACE, BCE** என்பவைகள் வடிவொத்த முக்கோணங்களாகும்.

$$\therefore \quad \frac{CE}{BE} = \frac{AE}{CE} = \frac{AC}{BC}$$

ஆகவே $AE.\ BE = CE^2$

மேலும் $\frac{\triangle ACE}{\triangle BCE} = \frac{AE}{BE} = \frac{AE^2}{AE.\ BE} = \frac{AE^2}{CE^2} = \frac{AC^2}{BC^2}$.

B-லிருந்து **AC**-க்கும் **CE**-க்கும், **BF, BD** என்ற குத்துக்கோடுகள் வரைக.

அப்பொழுது $\cos\theta = \frac{CF}{BC} = \frac{1}{2}\frac{AC}{BC}$ ($\because$ BCA = BAC),

$$\therefore \quad \frac{\triangle ACE}{\triangle BCE} = 4\cos^2\theta$$

$$\frac{AB}{BE} = \frac{\triangle ABC}{\triangle BCE} = \frac{\triangle ACE - \triangle BCE}{\triangle BCE}$$

$$= \frac{\triangle ACE}{\triangle BCE} - 1$$

$$= 4\cos^2\theta - 1 = 3 - 4\sin^2\theta.$$

BDE முக்கோணத்தில்

$$\sin 3\theta = \sin BED = \frac{BD}{BE} = \frac{BD}{AB}\cdot\frac{AB}{BE}$$

$$= \frac{BD}{BC}\cdot\frac{AB}{BE}$$

$$= \sin\theta\,(3 - 4\sin^2\theta)$$

$$= \mathbf{3\sin\theta - 4\sin^3\theta}$$

$$\cos 3\theta = \frac{DE}{BE} = \frac{CD - CE}{BE} = \frac{CD}{BE} - \frac{CE}{BE}$$

$$= \frac{CD}{BC}\cdot\frac{BC}{BE} - \frac{AC}{BC}$$

$$= \cos\theta.\frac{AB}{BE} - \frac{2\,CF}{BC}$$

$$= \cos\theta\,(4\cos^2\theta - 1) - 2\cos\theta$$

$$= \mathbf{4\cos^3\theta - 3\cos\theta}.$$

பயிற்சி 20.

$4\sin A \sin(60^\circ + A)\sin(120^\circ + A) = \sin 3A$ என்று நிறுவுக.

$\sin(120^\circ + A) = \sin(180^\circ - 120^\circ - A) = \sin(60^\circ - A)$

ஆகவே $4\sin A \sin(60^\circ + A)\sin(120^\circ + A)$

$= 4\sin A.\ \sin(60^\circ + A)\sin(60^\circ - A)$

$= 4\sin A\,(\sin^2 60^\circ - \sin^2 A)$ (பயிற்சி 4 பக்கம் 59)

$= 4\sin A\,(\frac{3}{4} - \sin^2 A)$

$= 3\sin A - 4\sin^3 A$

$= \sin 3A.$

பயிற்சி 21.

$$4\cos A\cos\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3}+A\right)=\cos 3A$$

என்று நிறுவுக.

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)=\cos(120^\circ-A)=\cos(180^\circ-\overline{60^\circ+A})$$
$$=-\cos(60^\circ+A).$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}+A\right)=\cos(120^\circ+A)=\cos(180^\circ-\overline{60^\circ-A})$$
$$=-\cos(60^\circ-A).$$

ஆகவே $4\cos A\cos\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3}+A\right)$

$= 4\cos A\cos(60^\circ+A)\cos(60^\circ-A)$

$= 4\cos A(\cos^2 60^\circ-\sin^2 A)$ (பயிற்சி 4 பக்கம் 59)

$= 4\cos A(\frac{1}{4}-\sin^2 A)$

$= 4\cos A(\frac{1}{4}-1+\cos^2 A)$

$= 4\cos A(\cos^2 A-\frac{3}{4})$

$= 4\cos^3 A-3\cos A.$

$= \cos 3A.$

பயிற்சி 22.

$$\sin\frac{\pi}{5}\ \sin\frac{2\pi}{5}\ \sin\frac{3\pi}{5}\ \sin\frac{4\pi}{5}=\frac{5}{16}$$ என்று காட்டுக.

$$\sin\frac{\pi}{5}.\ \sin\frac{2\pi}{5}.\ \sin\frac{3\pi}{5}.\ \sin\frac{4\pi}{5}$$

$= \sin 36^\circ \sin 72^\circ \sin 108^\circ \sin 144^\circ$

$= \sin 36^\circ.\ \sin 72^\circ.\ \sin 72^\circ.\ \sin 36^\circ.$

$= \sin^2 36^\circ \sin^2 72^\circ = \sin^2 36^\circ.\ \cos^2 18^\circ$

$= (1-\cos^2 36^\circ)(1-\sin^2 18^\circ)$

$$=\left\{1-\frac{(\sqrt5+1)^2}{16}\right\}\left\{1-\frac{(\sqrt5-1)^2}{16}\right\}$$

$$=\left(1-\frac{6+2\sqrt5}{16}\right)\left(1-\frac{6-2\sqrt5}{16}\right)$$

$$=\frac{(10-2\sqrt5)\ (10+2\sqrt5)}{16^2}$$

$$=\frac{100-20}{16\times16}=\frac{80}{16\times16}=\frac{5}{16}$$

பயிற்சி 23.

$\sin^3 A+\sin^3 (120°+A)+\sin^3 (240°+A)=-\frac{3}{4}\sin 3A$

என நிறுவுக.

$\sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A.$

$\therefore\quad 4\sin^3 A=3\sin A-\sin 3A.$

இவ்வாறே $4\sin^3 (120°+A)=3\sin (120°+A)-\sin (360°+3A)$

$=3\sin (120°+A)-\sin 3A.$

,, $4\sin^3 (240°+A)=3\sin (240°+A)-\sin (720°+3A)$

$=3\sin (240°+A)-\sin 3A.$

$\therefore\quad 4\{\sin^3 A+\sin^3 (120°+A)+\sin^3 (240°+A)\}$

$=3\{\sin A+\sin (120°+A)+\sin (240°+A)\}-3\sin 3A$

$=-3\sin 3A.$ [விஞ 15 பக்கம் 70]

$\therefore\quad \sin^3 A+\sin^3 (120°+A)+\sin^3 (240°+A)=-\frac{3}{4}\sin 3A.$

பயிற்சி 24.

$\tan A+\tan (60°+A)+\tan (120°+A)=3\tan 3A$ என்று நிறுவுக.

முதல் முறை.

$\tan A+\tan (60°+A)+\tan (120°+A)$

$=\tan A+\tan (60°+A)-\tan (60°-A).$

$=\tan A+\dfrac{\sin (60°+A)}{\cos (60°+A)}-\dfrac{\sin (60°-A)}{\cos (60°-A)}$

$=\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\sin (60°+A)\cos (60°-A)-\cos (60°+A)\sin (60°-A)}{\cos (60°+A)\cos (60°-A).}$

$=\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\sin (60°+A-60°-A)}{\cos^2 60°-\sin^2 A.}$

$=\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\sin 2A}{\frac{1}{4}-\sin^2 A}$

$=\dfrac{\sin A-4\sin^3 A+4\sin 2A\cos A}{\cos A(1-4\sin^2 A)}$

$$=\frac{\sin A-4\sin^3A+8\sin A\cos^2A}{\cos A-4\cos A\sin^2A}$$

$$=\frac{\sin A-4\sin^3A+8\sin A\ (1-\sin^2A)}{\cos A-4\cos A\ (1-\cos^2A)}$$

$$=\frac{3\ (3\sin A-4\sin^3A)}{4\cos^3A-3\cos A}$$

$$=\frac{3\sin 3A}{\cos 3A}=3\tan 3A$$

இரண்டாவது முறை.

$$\tan A+\tan\ (60^\circ+A)+\tan\ (120^\circ+A)$$

$$=\tan A+\tan\ (60^\circ+A)-\tan\ (60^\circ-A)$$

$$=\tan A+\frac{\sqrt{3}+\tan A}{1-\sqrt{3}\tan A}-\frac{\sqrt{3}-\tan A}{1+\sqrt{3}\tan A}$$

$$=\tan A+\frac{(\tan A+\sqrt{3})(1+\sqrt{3}\tan A)+(\tan A-\sqrt{3})(1-\sqrt{3}\tan A)}{(1-\sqrt{3}\tan A)(1+\sqrt{3}\tan A)}$$

$$=\tan A+\frac{8\tan A}{1-3\tan^2A}$$

$$=\frac{9\tan A-3\tan^3A}{1-3\tan^2A}=3\ \frac{3\tan A-\tan^3A}{1-3\tan^2A}$$

$$=3\tan 3A.$$

பயிற்சிகள் 12

1. $\cos A=\frac{1}{3}$ எனின் $\cos 3A$-ன் மதிப்பு என்ன ?
2. $\sin A=\frac{3}{5}$ எனின் $\sin 3A$-ன் மதிப்பு என்ன ?
3. $\tan A=3$ எனின் $\tan 3A$-ன் மதிப்பு என்ன ?

பின் வருவனவற்றை நிறுவுக :—

4. $2\sin\theta=\frac{1}{a}+a$ எனின் $\sin 3\theta=-\frac{1}{2}\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right)$
5. $2\cos\theta=a+\frac{1}{a}$ எனின் $2\cos 3\theta=a^3+\frac{1}{a^3}$
6. $4\ (\cos^3 20^\circ+\cos^3 40^\circ)=3\ (\cos 20^\circ+\cos 40^\circ)$
7. $(4\cos^3 10^\circ+\sin^3 20^\circ)=3\ (\cos 10^\circ+\sin 20^\circ)$
8. படம் 42-ஐப் பயன்படுத்தி $\cos 36^\circ-\cos 72^\circ=\frac{1}{2}$ என்று நிறுவுக.

9. $\cos^2 36^\circ + \sin^2 18^\circ = \frac{3}{4}$.

10. $\dfrac{\sin 3A}{\sin A} - \dfrac{\cos 3A}{\cos A} = 2$.

11. $\dfrac{3\cos A + \cos 3A}{3\sin A - \sin 3A} = \cot^2 A$.

12. $\dfrac{\sin 3A + \sin^3 A}{\cos^3 A - \cos 3A} = \cot A$.

13. $\dfrac{\sin 3A - \cos 3A}{\sin A + \cos A} = 2\sin 2A - 1$.

14. $\dfrac{\cos^3 A - \cos 3A}{\cos A} + \dfrac{\sin^3 A - \sin 3A}{\sin A} = 3$.

15. $\dfrac{\cos 3A}{\sin A} + \dfrac{\sin 3A}{\cos A} = 2\cot 2A$.

16. $\dfrac{\tan 3A}{\tan A} = \dfrac{2\cos 2A + 1}{2\cos 2A - 1}$.

17. $\dfrac{\cos A - \cos 3A}{\sin 3A - \sin A} = \tan 2A$.

18. $\dfrac{\cos 2A - \cos 4A}{\sin 4A - \sin 2A} = \tan 3A$.

19. $\dfrac{\tan 2\theta + \tan\theta}{\tan 2\theta - \tan\theta} = \dfrac{\sin 3\theta}{\sin\theta}$.

20. $\tan 3A - \tan 2A - \tan A = \tan 3A \tan 2A \tan A$.

21. $\tan A \tan(60^\circ - A)\tan(60^\circ + A) = \tan 3A$.

22. $\cot A + \cot(60^\circ + A) + \cot(120^\circ + A) = 3\cot 3A$,

23. $\sec A + \sec\left(\dfrac{2\pi}{3} + A\right) + \sec\left(\dfrac{2\pi}{3} - A\right) = -3\sec 3A$.

24. $\operatorname{cosec} A + \operatorname{cosec}\left(\dfrac{2\pi}{3} + A\right) + \operatorname{cosec}\left(\dfrac{4\pi}{3} + A\right) = 3\operatorname{cosec} 3A$.

25. $\cos^3 A + \cos^3\left(\dfrac{2\pi}{3} + A\right) + \cos^3\left(\dfrac{4\pi}{3} + A\right) = \frac{3}{4}\cos 3A$.

அதிகாரம் 6

பெருக்கல், கூட்டல் தொகைகளை, ஒன்றை மற்றொன்றாக மாற்றல்

57. பெருக்கல் தொகையைக் கூட்டல் தொகையாகவோ வேற்றுமைத் தொகையாகவோ மாற்றல்.

முந்தின அதிகாரத்தில் நாம்

$$\sin (A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$
$$\sin (A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

என்ற வாய்பாடுகளை நிறுவினோம். இரண்டையும் கூட்டினால் கிடைப்பது

$$\sin (A+B) + \sin (A-B) = 2 \sin A \cos B. \quad (1)$$

ஒன்றிலிருந்து மற்றொன்றைக் கழித்தால் கிடைப்பது

$$\sin (A+B) - \sin (A-B) = 2 \cos A \sin B. \quad (2)$$

மேலும் $\cos (A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B.$
$\cos (A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B.$

என்ற வாய்பாடுகளை முந்தின அதிகாரத்தில் நிறுவினோம்.

இரண்டையும் கூட்ட பெறுவது

$$\cos (A+B) + \cos (A-B) = 2 \cos A \cos B. \quad (3)$$

ஒன்றிலிருந்து மற்றொன்றைக் கழிக்க பெறுவது

$$\cos (A-B) - \cos (A+B) = 2 \sin A \sin B. \quad (4)$$

58. மேற்கண்ட (1), (2), (3), (4) வாய்பாடுகளைக்கொண்டு

(1) ஒரு நெடுக்கையினதும் கிடக்கையினதும் பெருக்கல் தொகையை, இரண்டு நெடுக்கைகளின் கூட்டல் தொகையாகவும் அல்லது வேற்றுமைத் தொகையாகவும்,

(2) இரண்டு கிடக்கைகளின் பெருக்கல் தொகையை, இரண்டு கிடக்கைகளின் கூட்டல் தொகையாகவும்,

(3) இரண்டு நெடுக்கைகளின் பெருக்கல் தொகையை, இரண்டு கிடக்கைகளின் வேற்றுமைத் தொகையாகவும் கூறலாம்.

பயிற்சி 1. $2 \sin 4\theta \cos 2\theta$-ஐ கூட்டல் தொகையாக மாற்றுக.

$$2 \sin 4\theta \cos 2\theta = \sin (4\theta + 2\theta) + \sin (4\theta - 2\theta)$$
$$= \sin 6\theta + \sin 2\theta.$$

பயிற்சி 2. **$2 \sin 4\theta \cos 6\theta$**-ஐ வேற்றுமைத் தொகையாக மாற்றுக.

$$2\cos 6\theta \sin 4\theta = \sin(6\theta+4\theta)-\sin(6\theta-4\theta)$$
$$= \sin 10\theta - \sin 2\theta.$$

பயிற்சி 3. **$2\cos\theta\cos 4\theta$**-ஐ கூட்டல் தொகையாக மாற்றுக.

$$2\cos\theta\cos 4\theta = \cos(\theta+4\theta)+\cos(\theta-4\theta)$$
$$= \cos 5\theta + \cos(-3\theta)$$
$$= \cos 5\theta + \cos 3\theta.$$

பயிற்சி 4. **$\sin\theta\sin 3\theta$**-ஐ வேற்றுமைத் தொகையாக மாற்றுக.

$$2\sin\theta\sin 3\theta = \cos(3\theta-\theta)-\cos(3\theta+\theta)$$
$$= \cos 2\theta - \cos 4\theta.$$

$$\therefore \quad \sin\theta\sin 3\theta = \tfrac{1}{2}(\cos 2\theta - \cos 4\theta).$$

பயிற்சி 5. $\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7} = \frac{1}{8}$

கோவையை **$2\sin\frac{2\pi}{7}$**-ஆல் பெருக்கின் கிடைப்பது

$$2\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}$$

$$= \sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sin\frac{8\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}$$

$$= \tfrac{1}{4}\left(\sin\frac{8\pi+6\pi}{7}+\sin\frac{8\pi-6\pi}{7}\right)$$

$$= \tfrac{1}{4}\left(\sin 2\pi + \sin\frac{2\pi}{7}\right)$$

$$= \tfrac{1}{4}\sin\frac{2\pi}{7}$$

$$\therefore \quad \cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7} = \tfrac{1}{8}$$

பயிற்சி 6.

$$\sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}\sin\frac{5\pi}{14}=\tfrac{1}{8}$$ என்று நிறுவுக.

கோவையை $2\cos\frac{\pi}{14}$-ஆல் பெருக்கின்

$$2\cos\frac{\pi}{14}\sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}\sin\frac{5\pi}{14}$$

$$=\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{14}\sin\frac{5\pi}{14}$$

$$=\tfrac{1}{2}\sin\frac{3\pi}{14}\left(\cos\frac{3\pi}{14}-\cos\frac{7\pi}{14}\right)$$

$$=\tfrac{1}{2}\sin\frac{3\pi}{14}\left(\cos\frac{3\pi}{14}-\cos\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\tfrac{1}{2}\sin\frac{3\pi}{14}\cos\frac{3\pi}{14}$$

$$=\tfrac{1}{4}\sin\frac{6\pi}{14}=\tfrac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{6\pi}{14}\right)=\tfrac{1}{4}\cos\frac{\pi}{14}$$

$$\therefore\quad \sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}\sin\frac{5\pi}{14}=\tfrac{1}{8}.$$

பயிற்சிகள் 13

கீழ்க் கண்டவற்றைக் கூட்டல் தொகையாகவோ, வேற்றுமைத் தொகையாகவோ மாற்றுக :—

1. $2\sin 3\theta\cos\theta$
2. $2\cos 7\theta\cos 5\theta$
3. $2\cos 6\theta\sin 3\theta$
4. $2\sin 3A\sin 2A$
5. $2\cos 5A\sin 4A$
6. $2\sin 4A\sin 8A$
7. $2\cos 9\theta\sin 7\theta$
8. $\cos 4\theta\cos 9\theta$
9. $\cos\frac{A}{2}\sin\frac{3A}{2}$
10. $\sin\frac{5A}{2}\cos\frac{7A}{2}$
11. $\cos\frac{2\theta}{3}\cos\frac{5\theta}{3}$
12. $\sin\frac{A}{4}\sin\frac{3A}{4}$

13. $\sin(120^\circ+\theta)\sin(60^\circ+\theta)$ 14. $\sin(A+B)\sin(A-B)$

15. $\sin 6A \sin(A+B)$ 16. $\cos(120^\circ+A)(\cos 60^\circ+A)$

17. $\cos(120^\circ+A)\sin(60^\circ+A)$ 18. $\sin(120^\circ-\theta)(\sin 60^\circ-\theta)$

கீழ்க் கண்டவற்றை நிறுவுக :—

19. $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)=\frac{1}{2}\cos\theta$

20. $\cos(A+B)+\sin(A-B)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+A\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+B\right)$

21. $\cos(A-B)-\sin(A-B)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-A\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-B\right)$

22. $\cos(A-B)+\sin(A+B)=2\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right)$

23. $\cos(A-B)-\sin(A+B)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}=A\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+B\right)$

24. $\sin(A-B)\sin C+\sin(B-C)\sin A+\sin(C-A)\sin B=0.$

25. $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{16}.$

26. $\cos\frac{\pi}{11}\cos\frac{2\pi}{11}\cos\frac{3\pi}{11}\cos\frac{4\pi}{11}\cos\frac{5\pi}{11}=\frac{1}{32}.$

27. $\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{2\pi}{13}\cos\frac{3\pi}{13}\cos\frac{4\pi}{13}\cos\frac{5\pi}{13}\cos\frac{6\pi}{13}=\frac{1}{64}.$

28. $\sin 10^\circ.\ \sin 30^\circ.\ \sin 50^\circ.\ \sin 70^\circ=\frac{1}{16}.$

59. கூட்டல் அல்லது வேற்றுமைத் தொகைகளைப் பெருக்கல் தொகைகளாக மாற்றல்.

முன் தொகுதியில் பின் வரும் வாய்பாடுகளை நிறுவினோம்.

$$\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B. \quad (1)$$

$$\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B. \quad (2)$$

$$\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B. \quad (3)$$

$$\cos(A-B)-\cos(A+B)=2\sin A\sin B. \quad (4)$$

$A+B=C$ என்றும் $A-B=D$ என்றும் கொண்டால்

$$A=\frac{C+D}{2},\quad B=\frac{C-D}{2}.$$

A, B என்பவற்றின் மதிப்புகளை (1), (2), (3), (4) ஆகிய வாய்பாடுகளில் ஈடாகக் கொடுப்பின்

$$\sin C+\sin D=2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}.$$

$$\sin C-\sin D=2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}.$$

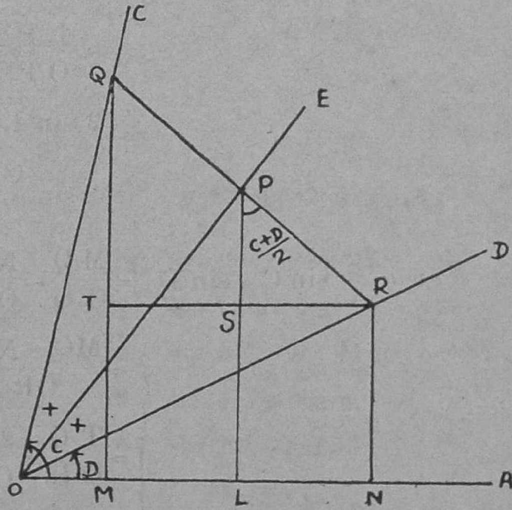
$$\cos C+\cos D=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}.$$

$$\cos D-\cos C=2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}.$$

அல்லது $$\cos C-\cos D=2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}.$$

60. (5) முதல் (8) வரையுள்ள வாய்பாடுகள் முதன்மையாதலின் அவற்றை மாணவர்கள் மனப்பாடம் செய்தல் வேண்டும். C, D, C + D என்பவை குறுங்கோணங்களாக இருப்பின் இவ்வாய்பாடுகளை வடிவ கணித முறைப்படியும் நிறுவலாம்.

AOC, AOD கோணங்களை முறையே C, D என்று வைத்துக் கொள்வோம். COD கோணத்தின் OE சம வெட்டியை வரைக. OE-ல் P புள்ளி வழி QPR கோட்டினை OP-க்குக் குத்துக்கோடாகவும், OC, OD கோடுகளை முறையே Q, R புள்ளிகளில் வெட்டும்படியாகவும் வரைக. OA-விற்குக் குத்துக்கோடுகளாக PL, QM, RN என்பவற்றை வரைக. R வழி PL, QM கோடுகளை முறையே S, T புள்ளிகளில் வெட்டும்படியாக QM-க்கு RST குத்துக்கோட்டினை வரைக.



படம் 44

$DOC = C - D$

$\therefore \quad DOE = COE = \dfrac{C-D}{2}$

மேலும் $AOE = D + \dfrac{C-D}{2} = \dfrac{C+D}{2}$

POR, POQ என்பவை அடங்கலும் ஒத்த முக்கோணங்களாதலால்

$OQ = OR \; ; \; PR = PQ.$

$\therefore \quad RQ = 2\ RP.$

ஆகவே $TQ = 2\ SP,\ TR = 2\ SR.$

$\therefore \quad MN = 2\ ML.$

$\therefore \quad MQ + NR = MT + TQ + LS = 2\ LS + 2\ SP = 2\ LP.$

மேலும்
$$\begin{aligned} OM + ON &= OM + OM + MN \\ &= 2\ OM + 2\ ML \\ &= 2\ OL. \end{aligned}$$

ஆகவே
$$\begin{aligned} \sin C + \sin D &= \frac{MQ}{OQ} + \frac{NR}{OR} \\ &= \frac{MQ + NR}{OR} = \frac{2\ LP}{OR} \\ &= 2\ \frac{LP}{OP} \cdot \frac{OP}{OR} \\ &= 2 \sin LOP \cos ROP \\ &= 2 \sin \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2} \end{aligned}$$

மேலும்
$$\begin{aligned} \sin C - \sin D &= \frac{MQ}{OQ} - \frac{NR}{OR} \\ &= \frac{MQ - NR}{OR} \\ &= \frac{TQ}{OR} = \frac{2SP}{OR} \\ &= 2\ \frac{SP}{RP} \cdot \frac{RP}{OR} \\ &= 2 \cos SPR \sin ROP \end{aligned}$$

$SPR = 90° - SPO = LOP = \frac{C+D}{2}$ என்றிருப்பதால்

$$\sin C - \sin D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2}$$

மேலும் $\cos C + \cos D = \frac{OM}{OQ} + \frac{ON}{OR}$

$$= \frac{OM + ON}{OR} = \frac{2OL}{OR}$$

$$= 2 \frac{OL}{OP} \cdot \frac{OP}{OR}$$

$$= 2 \cos LOP \cos POR$$

$$= 2 \cos \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2}$$

மேலும் $\cos D - \cos C = \frac{ON}{OR} - \frac{OM}{OQ} = \frac{ON - OM}{OR} = \frac{MN}{OR}$

$$= \frac{2\,SR}{OR} = 2 \cdot \frac{SR}{PR} \cdot \frac{PR}{OR}$$

$$= 2 \sin SPR \sin POR$$

$$= 2 \sin \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2}.$$

பயிற்சிகள் 14

கீழ்க் கொடுத்துள்ளவற்றைப் பெருக்கல் தொகைகளாக மாற்றுக :—

1. $\sin 12A + \sin 4A$.
2. $\sin 12A - \sin 4A$.
3. $\cos 12A + \cos 4A$.
4. $\cos 12A - \cos 4A$.
5. $\sin 5\theta - \sin \theta$.
6. $\cos 9\theta - \cos 11\theta$.
7. $\cos 3\alpha + \cos 8\alpha$.
8. $\cos 5\alpha - \cos \alpha$.
9. $\cos 10° - \cos 50°$.
10. $\sin 70° + \sin 50°$.

கீழ்க் கொடுத்துள்ளவற்றை நிறுவுக.

11. $\frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \tan \frac{A+B}{2}$.

12. $\dfrac{\sin A - \sin B}{\cos B - \cos A} = \cot \dfrac{A+B}{2}$.

13. $\dfrac{\cos A + \cos B}{\cos B - \cos A} = \cot \dfrac{A+B}{2} \cot \dfrac{A-B}{2}$.

14. $\dfrac{\cos a - \cos 3a}{\sin 3a - \sin a} = \tan 2a$.

15. $\dfrac{\sin 2a + \sin 3a}{\cos 2a - \cos 3a} = \cot \dfrac{a}{2}$.

16. $\dfrac{\cos 4\theta - \cos \theta}{\sin \theta - \sin 4\theta} = \tan \dfrac{5\theta}{2}$.

17. $\dfrac{\cos 2\theta - \cos 12\theta}{\sin 12\theta + \sin 2\theta} = \tan 5\theta$.

18. $\cos 80^\circ + \cos 40^\circ = \cos 20^\circ$.

19. $\sin 50^\circ - \sin 70^\circ + \sin 10^\circ = 0$.

20. $\cos 18^\circ + \cos 162^\circ + \cos 234^\circ + \cos 306^\circ = 0$.

21. $\sin 10^\circ + \sin 20^\circ + \sin 40^\circ + \sin 50^\circ = \sin 70^\circ + \sin 80^\circ$.

பின் வரும் பயிற்சிகளைக் கருத்தூன்றிப் படிக்கவும்.

பயிற்சி 7. $\sin A + \sin 3A + \sin 5A = \sin 3A\,(1 + 2\cos 2A)$ என்று நிறுவுக.

$$\sin A + \sin 3A + \sin 5A = \sin 3A + 2\sin\frac{A+5A}{2}\cos\frac{5A-A}{2}$$
$$= \sin 3A + 2\sin 3A\cos 2A.$$
$$= \sin 3A\,(1 + 2\cos 2A).$$

பயிற்சி 8. $\cos 20^\circ + \cos 100^\circ + \cos 140^\circ$ என்பதின் மதிப்பு என்ன ?

$$\cos 20^\circ + \cos 100^\circ + \cos 140^\circ = \cos 20^\circ + 2\cos 120^\circ \cos 20^\circ$$
$$= \cos 20^\circ + 2 \times -\tfrac{1}{2}\cos 20^\circ$$
$$= 0.$$

பயிற்சி 9. $\cos^2 A + \cos^2 (60^\circ + A) + \cos^2 (120^\circ + A) = \frac{3}{2}$ என்று நிறுவுக.

$$2\cos^2 A = 1 + \cos 2A$$
$$2\cos^2 (60^\circ + A) = 1 + \cos (120^\circ + 2A)$$
$$2\cos^2 (120^\circ + A) = 1 + \cos (240^\circ + 2A)$$
$$= 1 + \cos (360^\circ - \overline{120 - 2A})$$
$$= 1 + \cos (120^\circ - 2A)$$

$$\therefore \quad \cos^2 A + \cos^2 (60^\circ + A) + \cos^2 (120^\circ + A)$$
$$= \tfrac{1}{2} \{3 + \cos 2A + \cos (120^\circ + A) + \cos (120^\circ - 2A)\}$$
$$= \tfrac{1}{2} \{3 + \cos 2A + 2\cos 120^\circ \cos 2A\}$$
$$= \tfrac{1}{2} \{3 + \cos 2A - \cos 2A\}$$
$$= \tfrac{3}{2}.$$

பயிற்சி 10.

$$\cos \frac{2\pi}{15} + \cos \frac{4\pi}{15} + \cos \frac{8\pi}{15} + \cos \frac{16\pi}{15} = \frac{1}{2}$$

என்று நிறுவுக.

$$\cos \frac{2\pi}{15} + \cos \frac{4\pi}{15} + \cos \frac{8\pi}{15} + \cos \frac{16\pi}{15}$$
$$= \cos \frac{2\pi}{15} + \cos \frac{4\pi}{15} + \cos \frac{8\pi}{15} + \cos \frac{14\pi}{15}$$
$$= \left(\cos \frac{8\pi}{15} + \cos \frac{4\pi}{15} \right) + \left(\cos \frac{14\pi}{15} + \cos \frac{2\pi}{15} \right)$$
$$= 2\cos \frac{6\pi}{15} \cos \frac{2\pi}{15} + 2\cos \frac{6\pi}{15} \cos \frac{8\pi}{15}$$
$$= 2\cos \frac{2\pi}{5} \left(\cos \frac{2\pi}{15} + \cos \frac{8\pi}{15} \right)$$
$$= 2\cos \frac{2\pi}{5} \times 2\cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{5}$$
$$= 4\cos 72^\circ \cos 60^\circ \cos 36^\circ$$
$$= 4\sin 18^\circ \times \tfrac{1}{2} \times \cos 36^\circ$$
$$= 2 \times \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \times \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$$
$$= \tfrac{1}{2}.$$

பயிற்சி 11. $\sin A + \sin B = a$ என்றும், $\cos A + \cos B = b$ என்றும் இருப்பின் $\sin (A+B) = \frac{2ab}{a^2+b^2}$ என்று நிறுவுக.

$\sin A + \sin B = a$

(அ-து) $2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} = a$ (1)

$\cos A + \cos B = b$

(அ-து) $2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} = b$ (2)

1, 2 இவற்றின் தன்பெருக்கங்களைக் கூட்டின்,

$4 \cos^2 \frac{A-B}{2} = a^2 + b^2$ என்று கிடைக்கும்.

(1)-ஐயும் (2)-ஐயும் பெருக்கினல்

$4 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A+B}{2} \cos^2 \frac{A-B}{2} = ab$ என்று கிடைக்கும்.

(அ-து) $2 \sin (A+B). \cos^2 \frac{A-B}{2} = ab.$

(அ-து) $2 \sin (A+B). \frac{a^2+b^2}{4} = ab.$

$\therefore \quad \sin (A+B) = \frac{2ab}{a^2+b^2}$

பயிற்சி 12. $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{16}$ என்று நிறுவுக.

$\cos 20^\circ \cos 40^\circ = \frac{1}{2} (\cos 20^\circ + \cos 60^\circ)$

$= \frac{1}{2} \cos 20^\circ + \frac{1}{4}$

ஆகவே $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{2} \cos 20^\circ \cos 80^\circ + \frac{1}{4} \cos 80^\circ$

$= \frac{1}{4} (\cos 60^\circ + \cos 100^\circ) + \frac{1}{4} \cos 80^\circ$

$= \frac{1}{8} + \frac{1}{4} (\cos 100^\circ + \cos 80^\circ)$

$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cos 90^\circ \cos 10^\circ$

$= \frac{1}{8}.$

ஆகவே $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{16}.$

பயிற்சி 13.

$\sin x = n \sin(x+2\theta)$ எனின் $\tan(x+\theta) = \dfrac{1+n}{1-n} \tan\theta$ என்று நிறுவுக.

முதல் முறை

$$\sin x = n \sin(x+2\theta)$$

(அ-து) $\sin(x+\theta-\theta) = n \sin(x+\theta+\theta)$

(அ-து) $\sin(x+\theta)\cos\theta - \cos(x+\theta)\sin\theta$

$= n\sin(x+\theta)\cos\theta + n\sin\theta\cos(x+\theta)$

(அ-து) $(1-n)\sin(x+\theta)\cos\theta = (1+n)\cos(x+\theta)\sin\theta$

$$\therefore \quad \tan(x+\theta) = \frac{1+n}{1-n}\tan\theta.$$

இரண்டாவது முறை

$$\frac{\sin(x+2\theta)}{\sin x} = \frac{1}{n}$$

$$\therefore \quad \frac{\sin(x+2\theta)+\sin x}{\sin(x+2\theta)-\sin x} = \frac{1+n}{1-n}.$$

(அ-து) $\dfrac{2\sin(x+\theta)\cos\theta}{2\cos(x+\theta)\sin\theta} = \dfrac{1+n}{1-n}.$

$$\therefore \quad \tan(x+\theta) = \frac{1+n}{1-n}\tan\theta.$$

பயிற்சி 14.

$\dfrac{\sin\theta}{a} = \dfrac{\sin 3\theta}{b} = \dfrac{\sin 5\theta}{c}$ எனின் $a(a+b+c) = b^2$ என்று நிறுவுக.

$\dfrac{\sin\theta}{a} = \dfrac{\sin 3\theta}{b} = \dfrac{\sin 5\theta}{c} = k$ என்று வைத்துக்கொள்வோம்.

$$\therefore \quad k = \frac{\sin\theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta}{a+b+c}$$

$$=\frac{\sin 3\theta+2\sin 3\theta\cos 2\theta}{a+b+c}$$

$$=\frac{\sin 3\theta\,(1+2\cos 2\theta)}{a+b+c}$$

$$=\frac{\sin 3\theta\,(1+2-4\sin^2\theta)}{a+b+c}$$

$$=\frac{\sin 3\theta\,(3-4\sin^2\theta)}{a+b+c}$$

$$=\frac{\sin 3\theta\ \sin 3\theta}{(a+b+c)\ \sin\theta}$$

$\sin\theta=ak,\quad \sin 3\theta=bk.$

$$\therefore\quad k=\frac{b^2k^2}{(a+b+c)\ ak}$$

$$\therefore\quad a\,(a+b+c)=b^2.$$

பயிற்சி 15. $\sin x+\sin y+\sin z-\sin(x+y+z)$

$$=4\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y+z}{2}\sin\frac{z+x}{2}$$ என்று நிறுவுக.

$\sin x+\sin y+\sin z-\sin(x+y+z)$

$$=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}+2\cos\frac{x+y+2z}{2}\sin\frac{z-(x+y+z)}{2}$$

$$=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}-2\cos\frac{x+y+2z}{2}\sin\frac{x+y}{2}$$

$$=2\sin\frac{x+y}{2}\left(\cos\frac{x-y}{2}-\cos\frac{x+y+2z}{2}\right)$$

$$=2\sin\frac{x+y}{2}.\,2\sin\tfrac{1}{2}\left(\frac{x-y}{2}+\frac{x+y+2z}{2}\right)\cdot\sin\tfrac{1}{2}\left(\frac{x+y+2z}{2}-\frac{x-y}{2}\right)$$

$$=4\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{z+x}{2}\sin\frac{y+z}{2}.$$

பயிற்சிகள் 15

பின் வருவனவற்றை நிறுவுக :—

1. $(\cos \alpha+\cos \beta)^2+(\sin \alpha-\sin \beta)^2=4 \cos^2 \dfrac{\alpha+\beta}{2}$

2. $(\cos x+\cos y)^2+(\sin x+\sin y)^2=4 \cos^2 \dfrac{x-y}{2}$.

3. $(\cos x-\cos y)^2+(\sin x-\sin y)^2=4 \sin^2 \dfrac{x-y}{2}$.

4. $\sin x+\sin y=a$ என்றும் $\cos x+\cos y=b$ என்றுமிருப்பின்

$$\tan^2 \frac{x-y}{2}=\frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}.$$

5. $\sin x-\sin y=a$ என்றும் $\cos y-\cos x=b$ என்றும் இருப்பின்

$$\tan^2 \frac{x-y}{2}=\frac{a^2+b^2}{4-a^2-b^2}.$$

6. $\cos 3A+\sin 2A-\sin 4A=\cos 3A\ (1-2 \sin A)$.

7. $\sin 3\theta-\sin \theta-\sin 5\theta=\sin 3\theta\ (1-2 \cos 2\theta)$.

8. $\cos \theta+\cos 2\theta+\cos 5\theta=\cos 2\theta\ (1+2 \cos 3\theta)$.

9. $\sin \alpha-\sin 2\alpha+\sin 3\alpha=4 \sin \dfrac{\alpha}{2} \cos \alpha \cos \dfrac{3\alpha}{2}$.

10. $\sin 3\alpha+\sin 7\alpha+\sin 10\alpha=4 \sin 5\alpha \cos \dfrac{7\alpha}{2} \cos \dfrac{3\alpha}{2}$.

11. $\sin A+2 \sin 3A+\sin 5A=4 \sin 3A \cos^2 A$.

12. $\dfrac{\sin \alpha+\sin 2\alpha+\sin 4\alpha+\sin 5\alpha}{\cos \alpha+\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\cos 5\alpha}=\tan 3\alpha$.

13. $\dfrac{\sin 2\alpha+\sin 5\alpha-\sin \alpha}{\cos 2\alpha+\cos 5\alpha+\cos \alpha}=\tan 2\alpha$.

14. $\cos 10^\circ \cos 30^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ=\frac{3}{16}$.

15. $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ=\frac{3}{16}$.

16. $\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ=\frac{1}{16}$.

17. $\cos (120^\circ+A) \cos (120^\circ-A)+\cos (120^\circ-A) \cos A+\cos A \cos (120^\circ+A)=-\frac{3}{4}$

18. $\cos 52^\circ \cos 68^\circ+\cos 68^\circ \cos 172^\circ+\cos 172^\circ \cos 52^\circ=-\frac{3}{4}$.

19. $\cos 55^\circ \cos 65^\circ + \cos 65^\circ \cos 175^\circ + \cos 175^\circ \cos 55^\circ = -\frac{3}{4}$.

20. $\cos \frac{\pi}{8} + \cos \frac{3\pi}{8} + \cos \frac{5\pi}{8} + \cos \frac{7\pi}{8} = 0$.

21. $\cos 12^\circ + \cos 84^\circ + \cos 132^\circ + \cos 156^\circ = -\frac{1}{2}$.

22. $\tan \theta = n \tan (A - \theta)$ எனின் $\frac{n-1}{n+1} = \frac{\sin (2\theta - A)}{\sin A}$.

23. $\frac{\cos \theta}{a} = \frac{\cos 2\theta}{b} = \frac{\cos 3\theta}{c}$ எனின் $\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{2b - (a+c)}{4b}$.

24. $\frac{\sin \theta}{a} = \frac{\sin 3\theta}{b} = \frac{\sin 5\theta}{c}$ எனின் $\frac{a - 2b + c}{b} = \frac{b - 3a}{a}$.

25. $\frac{\cos x}{a} = \frac{\cos (x+\theta)}{b} = \frac{\cos (x+2\theta)}{c} = \frac{\cos (x+3\theta)}{d}$ எனின்

$$\frac{a+c}{b} = \frac{b+d}{c}.$$

26. $\sin^2 A + \sin^2 (120^\circ + A) + \sin^2 (120^\circ - A) = \frac{3}{2}$.

27. $\sin (B - C) + \sin (C - A) + \sin (A - B)$

$$= -4 \sin \frac{B-C}{2} \sin \frac{C-A}{2} \sin \frac{A-B}{2}.$$

27. $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + \cos (\alpha + \beta + \gamma)$

$$= 4 \cos \frac{\beta+\gamma}{2} \cos \frac{\gamma+\alpha}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

29. $\cos (\alpha+\beta+\gamma) + \cos (\beta+\gamma-\alpha) + \cos (\gamma+\alpha-\beta)$
$+ \cos (\alpha+\beta-\gamma) = 4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$.

30. $\cos (\alpha+\beta) \cos (\alpha-\beta) + \cos (\beta+\gamma) \cos (\beta-\gamma)$
$+ \cos (\gamma+\alpha) \cos (\gamma-\alpha) = \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma$.

31. $\sin (\beta+\gamma-\alpha) + \sin (\gamma+\alpha-\beta) + \sin (\alpha+\beta-\gamma)$
$- \sin (\alpha+\beta+\gamma) = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$.

32. $\sin (\alpha+\beta+\gamma) + \sin (\alpha-\beta-\gamma) + \sin (\alpha+\beta-\gamma)$
$+ \sin (\alpha-\beta+\gamma) = 4 \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma$.

33. $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + \cos^2 (\alpha+\beta+\gamma)$
$= 2 \{1 + \cos (\beta+\gamma) \cos (\gamma+\alpha) \cos (\alpha+\beta)\}$.

34. $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma + \sin^2 (\alpha+\beta+\gamma)$
$= 2 \{1 - \cos (\alpha+\beta) \cos (\beta+\gamma) \cos (\gamma+\alpha)\}$.

61. $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$ தொடர்பைக்கொண்ட **A, B, C** மூன்று கோணங்களின் சார்பலன்களைக்கொண்டு பல்வகை முற்றொருமைகளை நிறுவலாம்.

மேற் கொடுத்த தொடர்பைக்கொண்டு, இரண்டு கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை, மூன்றும் கோணத்தின் நிமிர்க்குங்கோணம் ஆகும் **(supplementary angle)** என அறிகிறோம்.

ஆகவே

$$\sin(B+C) = \sin A,\ \cos(B+C) = -\cos A,\ \tan(B+C) = -\tan A$$
$$\sin(C+A) = \sin B,\ \cos(C+A) = -\cos B,\ \tan(C+A) = -\tan B$$
$$\sin(A+B) = \sin C,\ \cos(A+B) = -\cos C,\ \tan(A+B) = -\tan C$$

மேலும் $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90°$. ஆகவே ஒவ்வோர் அரைக் கோணமும், மற்ற இரண்டு அரைக்கோணங்களின் கூட்டுத் தொகையின் நிரப்புங் கோணமாகும்.

எனவே,

$$\sin\frac{B+C}{2} = \cos\frac{A}{2},\quad \cos\frac{B+C}{2} = \sin\frac{A}{2},\quad \tan\frac{B+C}{2} = \cot\frac{A}{2}$$
$$\sin\frac{C+A}{2} = \cos\frac{B}{2},\quad \cos\frac{C+A}{2} = \sin\frac{B}{2},\quad \tan\frac{C+A}{2} = \cot\frac{B}{2}$$
$$\sin\frac{A+B}{2} = \cos\frac{C}{2},\quad \cos\frac{A+B}{2} = \sin\frac{C}{2},\quad \tan\frac{A+B}{2} = \cot\frac{C}{2}$$

பயிற்சி 16. $A + B + C = 180°$ என்றிருப்பின்

$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$ என்று நிறுவுக.

$$\begin{aligned}\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C &= 2\sin(A+B)\cos(A-B) + \sin 2C\\ &= 2\sin C\cos(A-B) + 2\sin C\cos C\\ &= 2\sin C\ \{\cos(A-B) + \cos C\}\\ &= 2\sin C\ \{\cos(A-B) - \cos(A+B)\}\\ &= 2\sin C\ 2\sin A\sin B\\ &= 4\sin A\sin B\sin C.\end{aligned}$$

பயிற்சி 17. ABC முக்கோணத்தில் $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ என்று நிறுவுக.

முக்கோணத்தில் $A+B+C=180°$.

$$\cos A+\cos B+\cos C=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$=1+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$=1+2\sin\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right\}$$

$$=1+2\sin\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right\}$$

$$=1+2\sin\frac{C}{2}\cdot 2\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}.$$

$$=1+4\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}.$$

பயிற்சி 18. $A+B+C=180°$ என்றிருப்பின்

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}=4\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi-B}{4}\cos\frac{\pi-C}{4}$$

என்று நிறுவுக.

$$4\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi-B}{4}\cos\frac{\pi-C}{4}$$

$$=2\cos\frac{\pi-A}{4}\left\{\cos\frac{2\pi-B-C}{4}+\cos\frac{B-C}{4}\right\}$$

$$=2\cos\frac{\pi-A}{4}\left\{\cos\frac{\pi+A}{4}+\cos\frac{B-C}{4}\right\}$$

$$=2\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi+A}{4}+2\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{B-C}{4}$$

$$=\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{A}{2}+2\cos\frac{B+C}{4}\cos\frac{B-C}{4}$$

$$=\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}.$$

பயிற்சி 19. $A+B+C=180°$ என்றிருப்பின்

$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A \tan B \tan C$ என்று காட்டுக.

$\tan(A+B)=-\tan C.$

(அ-து) $\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A \tan B}=-\tan C.$

(அ-து) $\tan A+\tan B=-\tan C\,(1-\tan A \tan B)$

$\therefore\quad \tan A+\tan B+\tan C=\tan A \tan B \tan C.$

பயிற்சி 20. $x+y+z=xyz$ என்றிருப்பின்

$$\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}+\frac{2z}{1-z^2}=\frac{2x}{1-x^2}\cdot\frac{2y}{1-y^2}\cdot\frac{2z}{1-z^2}$$ என்று நிறுவுக.

x, y, z என்பவற்றை முறையே கோணங்கள் A, B, C-ன் இருக்கைகள் எனக் கொள்வோம்.

$\therefore\quad x=\tan A,\ y=\tan B,\ z=\tan C.$

$\therefore\quad \tan A+\tan B+\tan C=\tan A \tan B \tan C,$

$\therefore\quad \tan(A+B+C)=0.$ { ஏனெனின், பக்கம் 65, வினா 17-ல் பின்ன மேல் எண் சுன்னமாகும்.

$\therefore\quad A+B+C=\pi$-யின் ஏதாவதொரு மடங்கு கோணம்.

$\therefore\quad 2A+2B+2C=2\pi$-யின் ,,

$\therefore\quad \tan(2A+2B+2C)=0.$

ஆனல் $\tan(2A+2B+2C)=\dfrac{\Sigma \tan 2A-\tan 2A \tan 2B \tan 2C}{1-\Sigma \tan 2B \tan 2C}.$

$\therefore\quad \tan 2A+\tan 2B+\tan 2C=\tan 2A \tan 2B \tan 2C.$

மேலும் $\tan 2A=\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}=\dfrac{2x}{1-x^2}.\quad [\because \tan A=x]$

இவ்வாறே $\tan 2B=\dfrac{2y}{1-y^2},\quad \tan 2C=\dfrac{2z}{1-z^2}$

ஆகவே $\dfrac{2x}{1-x^2}+\dfrac{2y}{1-y^2}+\dfrac{2z}{1-z^2}=\dfrac{2x}{1-x^2}\cdot\dfrac{2y}{1-y^2}\cdot\dfrac{2z}{1-z^2}.$

பயிற்சிகள் 16

$A+B+C=180^\circ$ என்றிருக்குமாயின் பின் வருவனவற்றை நிறுவுக.

1. $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

2. $\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

3. $\sin 2A-\sin 2B+\sin 2C=4\cos A\sin B\sin C$.

4. $\sin 2A-\sin 2B-\sin 2C=-4\sin A\cos B\cos C$.

5. $\cos A-\cos B+\cos C=4\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-1$,

6. $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1$.

7. $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C+4\cos A\cos B\cos C+1=0$.

8. $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C$.

9. $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2(1+\cos A\cos B\cos C)$.

10. $\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C=2\sin A\sin B\sin C$.

11. $\cos^2 A+\cos^2 B-\cos^2 C=1-2\sin A\sin B\sin C$.

12. $\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C=2\cos A\sin B\sin C-1$.

13. $\cos^2 2A+\cos^2 2B+\cos^2 2C=1+2\cos 2A\cos 2B\cos 2C$.

14. $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

15. $\sin^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{B}{2}-\sin^2\frac{C}{2}=1-2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

16. $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}-\cos^2\frac{C}{2}=2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

17. $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}+\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C-A}{2}+\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$.
$=\sin A+\sin B+\sin C$.

18. $\sin(B+C-A)+\sin(C+A-B)+\sin(A+B-C)$
$=4\sin A\sin B\sin C$,

19. $\sin^2 A\tan A+\sin^2 B\tan B+\sin^2 C\tan C$
$=\tan A\tan B\tan C-2\sin A\sin B\sin C$.

20. $\sin A + \sin B + \sin C = 1 + 4 \cos \frac{\pi + 2A}{4} \cos \frac{\pi + 2B}{4} \cos \frac{\pi + 2C}{4}.$

21. $\cos A + \cos B + \cos C = 4 \cos \frac{\pi - 2A}{4} \cos \frac{\pi - 2B}{4} \cos \frac{\pi - 2C}{4}.$

22. $\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} = 1 + 4 \sin \frac{\pi - A}{4} \sin \frac{\pi - B}{4} \sin \frac{\pi - C}{4}.$

23. $\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} = 1 + 4 \sin \frac{B + C}{4} \sin \frac{C + A}{4} \sin \frac{A + B}{4}.$

24. $\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} = 4 \cos \frac{\pi + A}{4} \cos \frac{\pi + B}{4} \cos \frac{\pi + C}{4}.$

25. $\cos^2 \frac{A}{4} + \cos^2 \frac{B}{4} + \cos^2 \frac{C}{4} = \frac{3}{2} + 2 \cos \frac{B + C}{4} \cos \frac{C + A}{4} \cos \frac{A + B}{4}.$

26. $\cos^2 \frac{A}{4} + \cos^2 \frac{B}{4} + \cos^2 \frac{C}{4} = \frac{3}{2} + 2 \cos \frac{\pi - A}{4} \cos \frac{\pi - B}{4} \cos \frac{\pi - C}{4}.$

27. $\sin^2 \frac{A}{4} + \sin^2 \frac{B}{4} + \sin^2 \frac{C}{4} = \frac{3}{2} - 2 \cos \frac{\pi - A}{4} \cos \frac{\pi - B}{4} \cos \frac{\pi - C}{4}.$

28. $\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} - \cos \frac{C}{2} = 4 \cos \frac{\pi + A}{4} \cos \frac{\pi + B}{4} \cos \frac{\pi - C}{4}.$

29. $\cos 2nA + \cos 2nB + \cos 2nC + 1 = (-1)^n 4 \cos nA \cos nB \cos nC.$

30. $\sin 2nA + \sin 2nB + \sin 2nC = (-1)^{n-1} 4 \sin nA \sin nB \sin nC.$

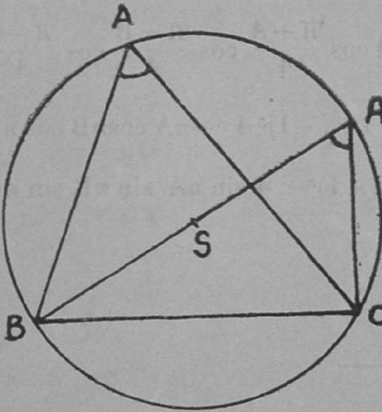
அதிகாரம் 7

முக்கோணத்தின் பண்புகள் (properties of triangles)

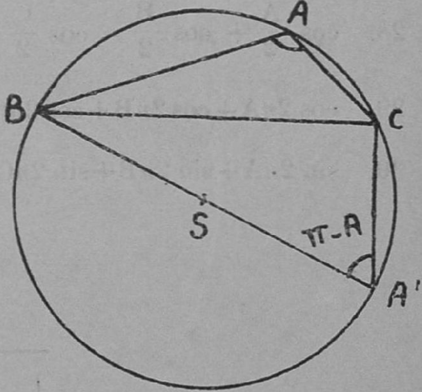
62. **ABC** முக்கோணத்தில், **BC, CA, AB** பக்கங்களை முறையே a, b, c என்பனவற்றாலும், இப்பக்கங்களுக்கு எதிரிலுள்ள கோணங்களை முறையே **A, B, C** என்பனவற்றாலும்,* இப்பக்கங்களின் கூட்டல் தொகையை அஃதாவது முக்கோணத்தின் சுற்றளவு $(a+b+c)$-ஐ $2s$ என்பதாலும், முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டத்தின் **(circumcircle)** ஆரையை **R** என்பதாலும், முக்கோணத்தின் பரப்பை Δ என்பதாலும் குறிப்பிடுவது மரபு.

முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கும் கோணங்களுக்குமுள்ள தொடர்புகள்

63. **நெடுக்கை வாய்பாடு.** $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2\,R.$



படம் 45



படம் 46

ABC முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டத்தையும் அவ்வட்டத்தில் **B** வழிச் செல்லும் விட்டத்தையும் வரைக. **S** சுற்று வட்டத்தின் மையமாகும்.

---

* இக்குறியீட்டை முதன் முதல் பயன்படுத்தியவர் செர்மானிய தேசத்துக் கணிதப்பேராசிரியரான ஆயலர் (**Euler**) (1707–1783) ஆவர்.

படம் 45-ல் BA^1C முக்கோணத்தில் $\frac{BC}{BA^1} = \sin A.$

படம் 46-ல் BA^1C முக்கோணத்தில் $\frac{BC}{BA^1} = \sin(\pi - A) = \sin A.$

$$\therefore \quad \frac{a}{BA^1} = \sin A$$

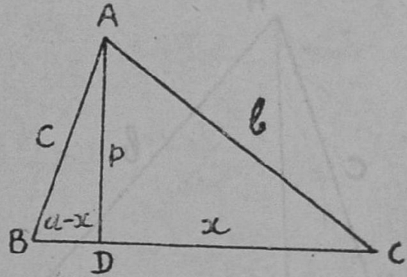
$$\therefore \quad \frac{a}{\sin A} = BA^1 = 2R$$

இவ்வாறே $\quad \frac{b}{\sin B} = 2R ; \quad \frac{c}{\sin C} = 2R$

ஆகவே $\quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$

64. கிடக்கை வாய்பாடு. முக்கோணத்துக் கோணங்களின் கிடக்கைகளைப் பக்கங்களின் சார்பலனாகக் காணுதல்.

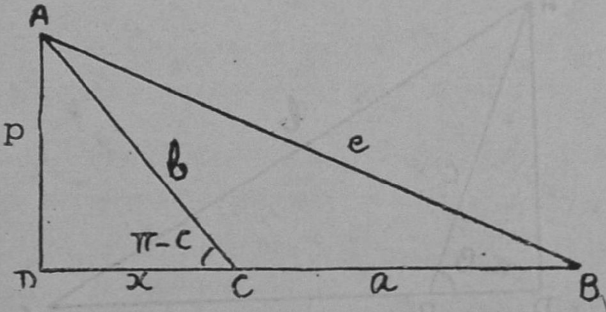
A-விருந்து BC-க்கு அல்லது அதன் நீட்சிக்கு AD குத்துக் கோடு வரைக. AD-ஐ p என்றும், CD-ஐ x என்றும் கொள்வோம்.



படம் 47

படம் 47-ல் $\angle C$ குறுங்கோணமாகும்.

$$\begin{aligned} c^2 &= p^2 + (a-x)^2 \\ &= p^2 + x^2 + a^2 - 2ax \\ &= b^2 + a^2 - 2ab \cos C \end{aligned}$$



படம் 48

படம் 48-ல் $\angle C$ விரிகோணமாகும்.

$$c^2 = p^2 + (a + x)^2$$
$$= p^2 + x^2 + a^2 + 2ax$$
$$= b^2 + a^2 + 2ab \cos (\pi - C)$$
$$= b^2 + a^2 - 2ab \cos C.$$

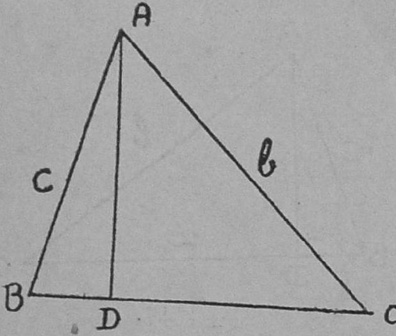
ஆகவே இரண்டு வகையிலும் $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$

$$\therefore \quad 2ab \cos C = a^2 + b^2 - c^2$$

$$\therefore \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

இவ்வாறே $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$; $\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}.$

65. ABC முக்கோணத்தில்
$$a = b \cos C + c \cos B$$
$$b = c \cos A + a \cos C$$
$$c = a \cos B + b \cos A$$
என்று நிறுவுதல்.



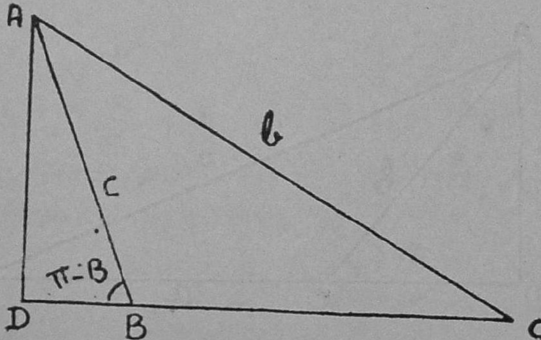
படம் 49

முதல் முறை.

BC பக்கத்திற்கு AD-ஐ குத்துக் கோடாக வரைக.

படம் 49-ல்

$$BC = BD + DC$$
$$\therefore \quad a = c \cos B + b \cos C$$



படம் 50

படம் 50-ல் $BC = DC - DB$

$$= b \cos C - c \cos (\pi - B)$$

$$= b \cos C + c \cos B.$$

இவ்வாறே மற்ற இரண்டு தொடர்புகளையும் AB, AC பக்கங்களுக்குக் குத்துக்கோடுகள் வரைந்து நிறுவலாம்.

இரண்டாவது முறை. ABC முக்கோணத்தில்

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$ என்று நிறுவினோம்.

ஆகவே $a = 2R \sin A$; $b = 2R \sin B$; $c = 2R \sin C$

$$a = 2R \sin A = 2R \sin (180° - B - C)$$

$$= 2R \sin (B + C)$$

$$= 2R (\sin B \cos C + \cos B \sin C)$$

$$= 2R \sin B \cos C + 2R \sin C \cos B.$$

$$= b \cos C + c \cos B.$$

மூன்றாவது முறை. கிடக்கை வாய்பாட்டிலிருந்தும் இவ்வாய்பாடுகளை நிறுவலாம்.

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}; \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$\therefore \quad b \cos C + c \cos B = \frac{a^3 + b^2 - c^2}{2a} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}$$

$$= \frac{2a^2}{2a} = a.$$

குறிப்பு :—கிடக்கை வாய்பாட்டையும், நெடுக்கை வாய்பாட்டையும், முன் தொகுதியிலுள்ள வாய்பாட்டிலிருந்து நிறுவலாம்.

66. முக்கோணத்திலுள்ள ஒரு கோணத்தின் நெடுக்கையைப் பக்கங்களின் சார்பலனாகக் காணுதல்.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$ (கிடக்கை வாய்பாடு)

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$$

$$= 1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2$$

$$= \left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$

$$= \frac{(b^2+c^2+2bc-a^2)}{2bc} \times \frac{(a^2-b^2-c^2+2bc)}{2bc}$$

$$= \frac{\{(b+c)^2-a^2\}\ \{a^2-(b-c)^2\}}{4b^2c^2}$$

$$= \frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4b^2c^2}$$

$$= \frac{2s\,(2s-2a)\,(2s-2c)\,(2s-2b)}{4b^2c^2}$$

$$= \frac{16\,s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{4b^2c^2}$$

$$\therefore \quad \sin A = \pm\frac{2}{bc}\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$$

$\angle A$, 180°-ஐ விடக் குறைவாக இருப்பதால் குறைக்குறியைத் தள்ளிவிடலாம்.

ஆகவே $\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$

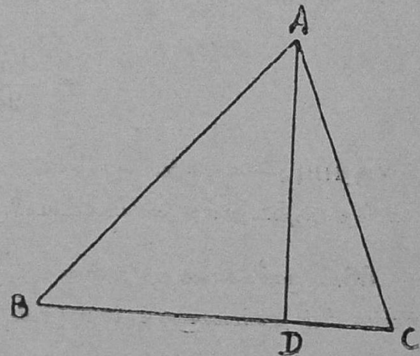
இவ்வாறே $\sin B = \frac{2}{ca}\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$

$\sin C = \frac{2}{ab}\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$

67. முக்கோணத்தின் பரப்பு.

(a)

A-விருந்து BC-க்கு அல்லது அதன் நீட்சிக்கு AD குத்துக் கோடு வரைக.



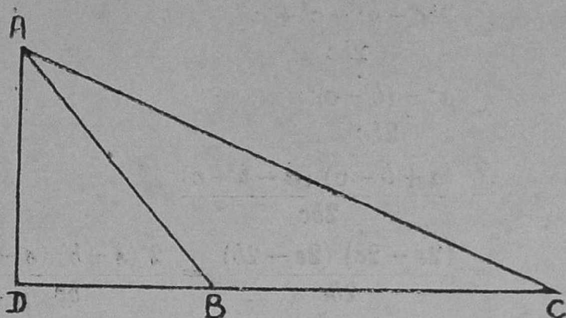
படம் 51

ABC-யின் பரப்பு $= \frac{1}{2}$ BC. AD.

$= \frac{1}{2}\, ac \sin B$

இவ்வாறே $\triangle ABC = \frac{1}{2}\, bc \sin A = \frac{1}{2}\, ab \sin C$.

ஆகவே $\triangle = \frac{1}{2}\, ab \sin C = \frac{1}{2}\, bc \sin A = \frac{1}{2}\, ca \sin B$



படம் 52

(*b*). மேலும் $\triangle = \frac{1}{2} ab \sin C$

$$= \frac{1}{2} ab \times \frac{2}{ab} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \; *$$

(c) $\frac{c}{\sin C} = 2R.$ (நெடுக்கை வாய்பாடு)

ஆகவே $\sin C = \frac{c}{2R}$

$$\therefore \quad \triangle = \frac{1}{2} ab \sin C.$$

$$= \frac{1}{2} ab \frac{c}{2R}$$

$$= \frac{abc}{4R}$$

68 முக்கோணத்துக் கோணங்களின் பாதியினுடைய நெடுக்கைகளைப் பக்கங்களின் சார்பலனுகக் காணுதல்.

$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ என்று நிறுவினோம்.

$$2 \sin^2 \frac{A}{2} = 1 - \cos A.$$

$$= 1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

---

* கிரான் (கி. மு. 100 ?) என்ற எகிப்து கணிதப் பேராசிரியரால் கண்டுபிடிக்கப்பட்டது. இவ்வாய்பாட்டை அவர் பெயரால் "கிரான் வாய்பாடு" என்று அழைப்பதுண்டு.

$$= \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc}$$

$$= \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc}$$

$$= \frac{(a+b-c)\,(a-b+c)}{2bc}$$

$$= \frac{(2s-2c)\,(2s-2b)}{2bc} = \frac{2\,(s-b)\,(s-c)}{bc}.$$

$$\therefore \quad \sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{bc}}.$$

$\frac{A}{2}$ குறுங்கோணமாதலால் குறைக்குறியைத் தள்ளிவிடலாம்.

$$\therefore \quad \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{bc}}$$

இவ்வாறே $\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)\,(s-a)}{ca}}$; $\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$

69. முக்கோணத்துக் கோணங்களின் பாதியினுடைய கிடக்கைகளைப் பக்கங்களின் சார்பலனுகக் காணுதல்.

$$2\cos^2\frac{A}{2} = 1 + \cos A.$$

$$= 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(b+c+a)\,(b+c-a)}{2bc}$$

$$= \frac{2s(\,2s-2a)}{2bc} = \frac{2s\,(s-a)}{bc}$$

$$\therefore \quad \cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{s\,(s-a)}{bc}}.$$

$\frac{A}{2}$ குறுங்கோணமாதலால் $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s\,(s-a)}{bc}}$.

இவ்வாறே $\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s\,(s-b)}{ca}}$; $\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s\,(s-c)}{ab}}$

70. முக்கோணத்துக் கோணங்களின் பாதியினுடைய இருக்கைகளைப் பக்கங்களின் சார்பலனாகக் காணுதல்.

$$\tan\frac{A}{2} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \div \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

இவ்வாறே $\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$; $\tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$

71. நேப்பியர் இருக்கை வாய்பாடு.

$$\tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}.$$

ABC முக்கோணத்தில் $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$. (நெடுக்கை வாய்பாடு)

$$\therefore \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C}.$$

$$\therefore \quad \frac{b-c}{b+c} = \frac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C}.$$

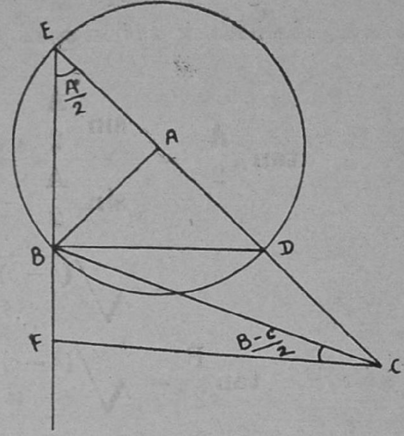
$$= \frac{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}$$

$$= \frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan\frac{B+C}{2}}$$

$$= \frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan\left(90^\circ - \frac{A}{2}\right)} = \frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\cot\frac{A}{2}}$$

ஆகவே $\tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}.$

72 வடிவ கணிதத் தெரிப்பு.



படம் 53

ABC முக்கோணத்தில் $b > c$ என்று வைத்துக்கொள்வோம். **A**ஐ மையமாகவும், **AB**ஐ ஆரையாகவும் வைத்து ஒரு வட்டம் வரைக. அது **AC** ஐயும் அதன் நீட்சியையும் **D**, **E**-யில் வெட்டுமெனக்கொள்வோம். **C**-யிலிருந்து **EB**-யின் நீட்சிக்கு **CF**-ஐ குத்துக் கோடாக வரைக.

அப்பொழுது $CD = AC - AD = AC - AB = b - c.$

$CE = AC + AE = AC + AB = b + c.$

$EBD = 90°.$

∴ **BD**யும் **FC**-யும் ஒரு போகுக் கோடுகளாகும்.

$$\angle E = \frac{A}{2}$$

மேலும் $FCB = FCA - ACB = 90° - \frac{A}{2} - C$

$$= \frac{B+C}{2} - C = \frac{B-C}{2}$$

ஆகவே $\frac{b-c}{b+c} = \frac{CD}{CE} = \frac{FB}{FE}$ (∵ **BD**-யும் **CF**-யும் ஒரு போகுக்கோடுகள்)

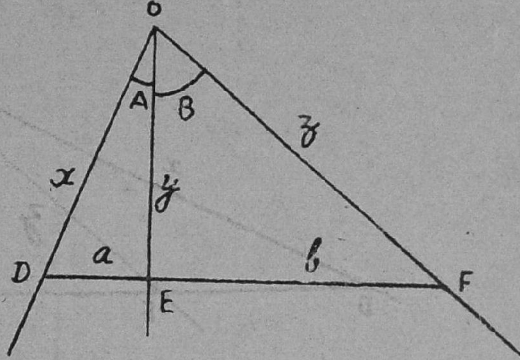
$$= \frac{FB}{FC} \div \frac{FE}{FC}$$

$$= \frac{\tan FCB}{\cot E} = \frac{\tan \frac{B-C}{2}}{\cot \frac{A}{2}}$$

$$\therefore \quad \tan \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \cot \frac{A}{2}$$

73. கூட்டல், வேற்றுமைத் தேற்றங்களுக்குப் பிறிதொரு வடிவ கணிதத் தெரிப்பு.

கோண உச்சியும், சிறையொன்றும் பொதுவாக இருக்கும்படி **A, B** என்ற இரண்டு கோணங்கள் வரைக.



OE பொதுச் சிறைக்கு **DF**ஐ குத்துக்கோடாக வரைக. **OD, OE, OF** என்பவற்றை முறையே x, y, z என்று வைத்துக்கொள்வோம்.

படம் 54

படம் 54ல் $\triangle \mathbf{ODF} = \triangle \mathbf{ODE} + \triangle \mathbf{OEF}$

(அ-து) $\frac{1}{2}\, xz \sin(A+B) = \frac{1}{2}\, xy \sin A + \frac{1}{2}\, yz \sin B$

இரண்டு பக்கங்களையும் $\frac{1}{2}\, xz$-ஆல் வகுத்தால்,

$$\sin(A+B) = \sin A.\ \frac{y}{z} + \sin B.\ \frac{y}{x}$$

$\triangle$ **OEF**-லிருந்து $\frac{y}{z} = \cos B$ என்றும்,

$\triangle$ **ODE**-லிருந்து $\frac{y}{x} = \cos A$ என்றும் கிடைக்கும்.

ஆகவே $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

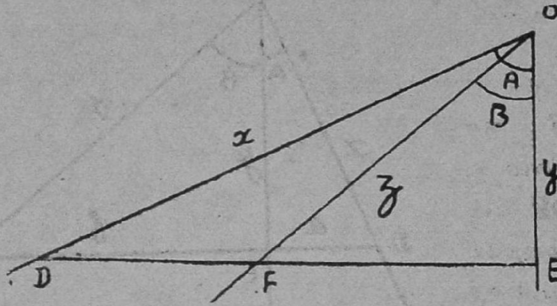
DE, EF என்பவற்றை முறையே a, b என்று வைத்துக்கொள்வோம்.

அப்பொழுது $DF^2 = x^2 + z^2 - 2xz \cos(A+B)$

$$\therefore \quad 2xz \cos(A+B) = x^2 + z^2 - DF^2$$
$$= x^2 + z^2 - (a+b)^2$$
$$= (x^2 - a^2) + (z^2 - b^2) - 2ab.$$
$$= 2y^2 - 2ab.$$

$$\therefore \quad \cos(A+B) = \frac{y}{x} \cdot \frac{y}{z} - \frac{a}{x} \cdot \frac{b}{z}.$$

$$= \cos A \cos B - \sin A \sin B.$$



படம் 55

படம் 55-ல் $\triangle ODF = \triangle ODE - \triangle OEF$

(அ-து) $\frac{1}{2} xz \sin(A-B) = \frac{1}{2} xy \sin A - \frac{1}{2} yz \sin B$

$$\therefore \quad \sin(A-B) = \sin A \cdot \frac{y}{z} \cdot - \frac{y}{x} \cdot \sin B.$$

$$= \sin A \cos B - \cos A \sin B.$$

$$2xz \cos(A-B) = x^2 + z^2 - (a-b)^2$$

$$= (x^2 - a^2) + (z^2 - b^2) + 2ab$$

$$= y^2 + y^2 + 2ab$$

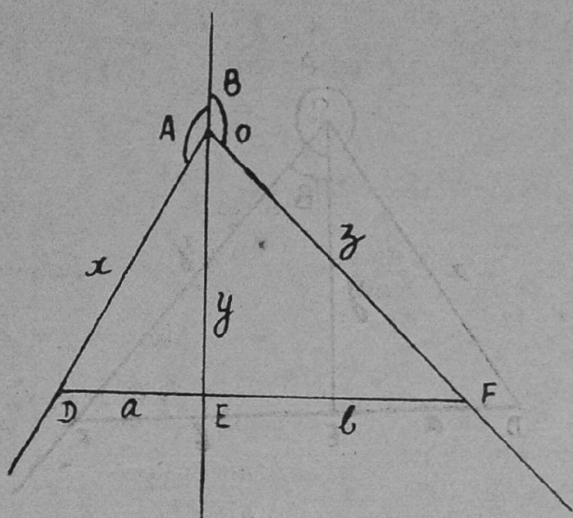
$$= 2y^2 + 2ab$$

$$\therefore \quad \cos(A-B) = \frac{y}{x} \cdot \frac{y}{z} + \frac{a}{x} \cdot \frac{b}{z}.$$

$$= \cos A \cos B + \sin A \sin B.$$

இதே முறையில் எல்லாப் பருமனுடைய கோணங்களுக்கும், கூட்டல் வேற்றுமைத் தேற்றங்கள் பொருந்துமென நிறுவலாம்.

$\sin(360° - \theta) = -\sin\theta$ என்றும், $\cos(360° - \theta) = \cos\theta$ என்றும் அறிவோம்,



படம் 56

படம் 56ல் $\triangle \mathbf{ODF} = \triangle \mathbf{ODE} + \triangle \mathbf{OEF}$

(அ-து)

$$\tfrac{1}{2}xz \sin(360^\circ - \overline{A+B}) = \tfrac{1}{2}xy \sin(180^\circ - A) + \tfrac{1}{2}yz \sin(180^\circ - B)$$

(அ-து) $-\tfrac{1}{2}xz \sin(A+B) = \tfrac{1}{2}xy \sin A + \tfrac{1}{2}yz \sin B$

(அ-து) $$\sin(A+B) = -\sin A \,\frac{y}{z} - \frac{y}{x}\sin B$$

$$= -\sin A \cos(180^\circ - B) - \cos(180^\circ - A)\sin B$$

$$= \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

மேலும் $$2xz \cos(360^\circ - \overline{A+B}) = x^2 + z^2 - (a+b)^2$$

$$= (x^2 - a^2) + (z^2 - b^2) - 2ab.$$

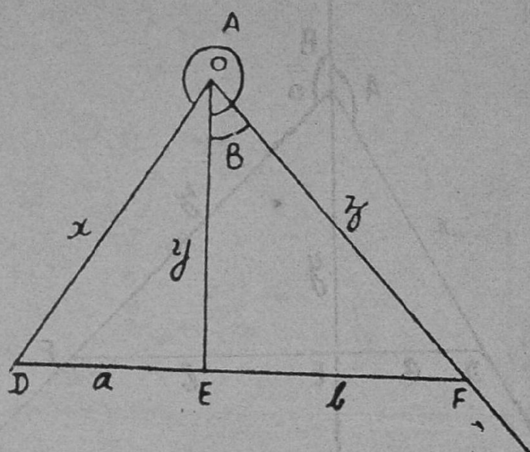
$$= 2y^2 - 2ab.$$

$$\therefore \quad 2xz \cos(A+B) = 2y^2 - 2ab.$$

$$\therefore \quad \cos(A+B) = \frac{y}{x} \cdot \frac{y}{z} - \frac{a}{x} \cdot \frac{b}{z}.$$

$$= \cos(180^\circ - A)\cos(180^\circ - B) - \sin(180^\circ - A)(\sin 180^\circ - B)$$

$$= \cos A \cos B - \sin A \sin B.$$



படம் 57

படம் 57-ல் $\triangle ODF = \triangle ODE + \triangle OEF$.

(அ-து) $\frac{1}{2}xz \sin(360^\circ - \overline{A-B}) = \frac{1}{2}xy \sin(360^\circ - A) + \frac{1}{2}yz \sin B$.

(அ-து) $-\frac{1}{2}xz \sin(A-B) = -\frac{1}{2}xy \sin A + \frac{1}{2}yz \sin B$.

$$\therefore \sin(A-B) = \sin A . \frac{y}{z} - \frac{y}{x} \sin B$$

$$= \sin A \cos B - \cos(360^\circ - A) \sin B$$

$$= \sin A \cos B - \cos A \sin B.$$

மேலும் $2xz \cos(360^\circ - \overline{A-B}) = x^2 + z^2 - (a+b)^2$

(அ-து) $2xz \cos(A-B) = (x^2 - a^2) + (z^2 - b^2) - 2ab$

$$= 2y^2 - 2ab$$

$$\therefore \cos(A-B) = \frac{y}{x} . \frac{y}{z} - \frac{a}{x} . \frac{b}{z}$$

$$= \cos(360^\circ - A) \cos B - \sin(360^\circ - A) \sin B$$

$$= \cos A \cos B + \sin A \sin B.$$

பயிற்சி 1. $\triangle = \dfrac{a^2}{2} \cdot \dfrac{1}{\cot B + \cot C}$ என்று காட்டுக.

முதல் முறை

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} \quad \text{(நெடுக்கை வாய்பாடு)}$$

ஆகவே $b = \dfrac{a \sin B}{\sin A}$; $c = \dfrac{a \sin C}{\sin A}$

$$\triangle = \tfrac{1}{2}\, bc \sin A$$

$$= \tfrac{1}{2} \frac{a \sin B}{\sin A} \cdot \frac{a \sin C}{\sin A} \cdot \sin A$$

$$= \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sin B \sin C}{\sin A}$$

$$= \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sin B \sin C}{\sin (B+C)}$$

$$= \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sin B \sin C}{(\sin B \cos C + \cos B \sin C)}$$

$$= \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{\left(\dfrac{\sin B \cos C}{\sin B \sin C} + \dfrac{\cos B \sin C}{\sin B \sin C}\right)}$$

$$= \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{(\cot C + \cot B)}$$

இரண்டாவது முறை

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \quad \text{(கிடக்கை வாய்பாடு)}$$

$$\therefore \quad \cot B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca \sin B} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{4\triangle}$$

இவ்வாறே $\cot C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{4\triangle}$

$$\therefore \cot B + \cot C = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{4\triangle} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4\triangle}$$

$$= \frac{a^2}{2\triangle}$$

$$\therefore \quad \triangle = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{(\cot B + \cot C)}$$

மூன்றுவது முறை

$$a = b \cos C + c \cos B. \quad \text{(தொகுதி 65)}$$

இரண்டு பக்கங்களையும் **sin B sin C**-ஆல் வகுத்தால் கிடைப்பது

$$\frac{a}{\sin B \sin C} = \frac{b}{\sin B} \cot C + \frac{c}{\sin C} \cot B$$

$$= 2R (\cot C + \cot B)$$

$$\therefore \quad \cot B + \cot C = \frac{a}{2R \sin B \sin C}$$

$$\triangle = \tfrac{1}{2}.\, ab \sin C$$

$$= \tfrac{1}{2}a.\ 2R \sin B \sin C$$

$$= aR.\ \sin B \sin C$$

$$\therefore \quad R \sin B \sin C = \frac{\triangle}{a}$$

$$\therefore \quad \cot B + \cot C = \frac{a}{2\,\dfrac{\triangle}{a}} = \frac{a^2}{2\triangle}$$

$$\therefore \quad \triangle = \frac{a^2}{2} . \frac{1}{(\cot B + \cot C)}$$

பயிற்சி 2. $\triangle = \dfrac{a^2 - b^2}{2} . \dfrac{\sin A \sin B}{\sin (A - B)}$ என்று நிறுவுக.

முதல் முறை

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

$$\therefore \quad a = 2R \sin A, \ b = 2R \sin B, \ c = 2R \sin C.$$

$$\triangle = \tfrac{1}{2} bc \sin A.$$

$$= \tfrac{1}{2}\, 2R \sin B.\ 2R \sin C.\ \sin A.$$

$$= 2R^2 \sin A \sin B \sin C.$$

$$= 2R^2 \sin A \sin B \sin (A + B)$$

$$= \frac{2R^2 \sin A \sin B \sin (A + B) \sin (A - B)}{\sin (A - B)}$$

$$= \frac{2R^2 \sin A \sin B (\sin^2 A - \sin^2 B)}{\sin (A - B)}$$

$$= \frac{2R^2 \sin A \sin B}{\sin (A - B)} \cdot \left(\frac{a^2}{4R^2} - \frac{b^2}{4R^2} \right)$$

$$= \frac{a^2 - b^2}{2} \cdot \frac{\sin A \sin B}{\sin (A - B)}.$$

இரண்டாவது முறை

$$\cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4\triangle}.$$

(முன் பயிற்சி இரண்டாவது முறையைப் பார்க்கவும்)

$$\cot B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{4\triangle}$$

$$\therefore \quad \cot B - \cot A = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{4\triangle} - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4\triangle}$$

(அ-து) $\dfrac{\cos B}{\sin B} - \dfrac{\cos A}{\sin A} = \dfrac{a^2 - b^2}{2\triangle}$

(அ-து) $\dfrac{\sin (A - B)}{\sin A \sin B} = \dfrac{a^2 - b^2}{2\triangle}$

$$\therefore \quad \triangle = \frac{a^2 - b^2}{2} \cdot \frac{\sin A \sin B}{\sin (A - B)}.$$

பயிற்சி 3. $a \cos A + b \cos B + c \cos C = 4R \sin A \sin B \sin C$ என்று நிறுவுக.

முதல் முறை

$a \cos A + b \cos B + c \cos C.$

$$= \frac{a(b^2 + c^2 - a^2)}{2bc} + \frac{b(c^2 + a^2 - b^2)}{2ca} + \frac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{2ab}$$

$$= \frac{a^2 (b^2 + c^2 - a^2) + b^2 (c^2 + a^2 - b^2) + c^2 (a^2 + b^2 - c^2)}{2abc}$$

$$= \frac{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4}{2abc}$$

$$= \frac{(a + b + c)(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c)}{2abc}$$

$$= \frac{2s\ (2s-2a)\ (2s-2b)\ (2s-2c)}{2abc}$$

$$= \frac{8s\ (s-a)\ (s-b)\ (s-c)}{abc}$$

$$= \frac{8\triangle^2}{abc}$$

$$= \frac{8}{abc}\ \frac{a^2b^2c^2}{16R^2} \quad \text{(தொகுதி 67(c))}$$

$$= \frac{abc}{2R^2}$$

$$= \frac{2R \sin A.\ \ 2R \sin B.\ \ 2R \sin C.}{2R^2}$$

$$= 4R \sin A \sin B \sin C.$$

இரண்டாவது முறை

$a \cos A + b \cos B + c \cos C.$

$= 2R \sin A \cos A + 2R \sin B \cos B + 2R \sin C \cos C.$

$= R\ (\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C.)$

$= 4R \sin A \sin B \sin C.$ (தொகுதி 61 பயிற்சி 16)

பயிற்சி 4.

$\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} = \frac{(a+b+c)}{4\triangle}$ என்று நிறுவுக.

$$\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2}$$

$$= \sqrt{\frac{s\ (s-a)}{(s-b)\ (s-c)}} + \sqrt{\frac{s\ (s-b)}{(s-c)\ (s-a)}} + \sqrt{\frac{s\ (s-c)}{(s-a)\ (s-b)}}$$

$$= \frac{\sqrt{s.}\ (s-a) + \sqrt{s.}\ (s-b) + \sqrt{s.}\ (s-c)}{\sqrt{(s-a)\ (s-b)\ (s-c)}}$$

$$= \frac{\sqrt{s.}\ (s-a+s-b+s-c).}{\frac{\triangle}{\sqrt{s.}}}$$

$$= \frac{s\ (3s-\overline{a+b+c})}{\triangle} = \frac{s^2}{\triangle} = \frac{(a+b+c)^2}{4\triangle}$$

பயிற்சி 5. $(b^2-c^2)\cot \mathbf{A}+(c^2-a^2)\cot \mathbf{B}+(a^2-b^2)\cot \mathbf{C}=0$ என்று காட்டுக.

முதல் முறை

$$a=2\text{R}\sin \text{A},\ b=2\text{R}\sin \text{B},\ c=2\text{R}\sin \text{C}.$$

$$(b^2-c^2)\cot \text{A}=4\text{R}^2(\sin^2\text{B}-\sin^2\text{C})\,\frac{\cos \text{A}}{\sin \text{A}}.$$

$$=\frac{4\text{R}^2\sin(\text{B}+\text{C})\sin(\text{B}-\text{C})\cos \text{A}}{\sin \text{A}}.$$

$$=\frac{4\text{R}^2\sin \text{A}\sin(\text{B}-\text{C})\cos \text{A}}{\sin \text{A}}.$$

$$=4\text{R}^2\sin(\text{B}-\text{C})\cos \text{A}.$$

$$=-4\text{R}^2\sin(\text{B}-\text{C})\cos(\text{B}+\text{C}).$$

$$=-2\text{R}^2(\sin 2\text{B}-\sin 2\text{C}).$$

இவ்வாறே $(c^2-a^2)\cot \text{B}=-2\text{R}^2(\sin 2\text{C}-\sin 2\text{A}).$

$(a^2-b^2)\cot \text{C}=-2\text{R}^2(\sin 2\text{A}-\sin 2\text{B}).$

ஆகவே $(b^2-c^2)\cot \text{A}+(c^2-a^2)\cot \text{B}+(a^2-b^2)\cot \text{C}.$

$$=-2\text{R}^2(\sin 2\text{B}-\sin 2\text{C}+\sin 2\text{C}-\sin 2\text{A}+\sin 2\text{A}-\sin 2\text{B}).$$

$$=0.$$

இரண்டாவது முறை

$$\cot \text{A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{4\triangle};\ \cot \text{B}=\frac{c^2+a^2-b^2}{4\triangle};\ \cot \text{C}=\frac{a^2+b^2-c^2}{4\triangle}$$

$$\therefore (b^2-c^2)\cot \text{A}+(c^2-a^2)\cot \text{B}+(a^2-b^2)\cot \text{C}.$$

$$=\frac{(b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)+(c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)+(a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{4\triangle}$$

$$=\frac{b^4-c^4-a^2(b^2-c^2)+c^4-a^4-b^2(c^2-a^2)+a^4-b^4-c^2(a^2-b^2)}{4\triangle}$$

$$=0.$$

பயிற்சி 6.

ABC முக்கோணத்தில் $\tan\theta = \frac{a+b}{a-b}\tan\frac{C}{2}$ என்றிருப்பின்

$c=(a-b)\cos\frac{C}{2}$ என்று நிறுவுக.

$$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos C.$$

$$= (a^2+b^2)\left(\cos^2\frac{C}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right) - 2ab\left(\cos^2\frac{C}{2}-\sin^2\frac{C}{2}\right)$$

$$= \cos^2\frac{C}{2}(a^2+b^2-2ab) + \sin^2\frac{C}{2}(a^2+b^2+2ab)$$

$$= (a-b)^2\cos^2\frac{C}{2} + (a+b)^2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$= (a-b)^2\cos^2\frac{C}{2}\left\{1+\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}\tan^2\frac{C}{2}\right\}$$

$$= (a-b)^2\cos^2\frac{C}{2}(1+\tan^2\theta)$$

$$= (a-b)^2\cos^2\frac{C}{2}\sec^2\theta$$

$$\therefore\quad c = (a-b)\cos\frac{C}{2}\sec\theta$$

பயிற்சி 7. ABC, $A^1B^1C^1$ என்ற முக்கோணங்களில் $\angle B$, $\angle B^1$ சமமாகவும், $\angle A$, $\angle A^1$ நிமிர்க்கும் கோணங்களாகவும் இருப்பின்

$aa^1 = bb^1 + cc^1$ என்று காட்டுக.

ABC முக்கோணத்தில்

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \qquad (1)$$

$A^1B^1C^1$ முக்கோணத்தில்

$$\frac{a^1}{\sin A^1} = \frac{b^1}{\sin B^1} = \frac{c^1}{\sin C^1} \qquad (2)$$

$$A^1 = 180 - A.\ ;\ B^1 = B.$$

ஆகவே $$\frac{a^1}{\sin A}=\frac{b^1}{\sin B}=\frac{c^1}{\sin C^1} \qquad (3)$$

(1)-ஐயும் (3)-ஐயும் பெருக்கின் கிடைப்பது

$$\frac{aa^1}{\sin^2 A}=\frac{bb^1}{\sin B}=\frac{cc^1}{\sin C \sin C^1}$$

$$\therefore \quad \frac{aa^1}{\sin^2 A}=\frac{bb^1+cc^1}{\sin^2 B+\sin C \sin C^1} \qquad (4)$$

$$\begin{aligned}\sin^2 A-\sin^2 B &= \sin(A+B)\sin(A-B)\\ &= \sin C \sin(180^\circ - A^1 - B^1)\\ &= \sin C \sin C^1\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \sin^2 A = \sin^2 B + \sin C \sin C^1$$

$$\frac{aa^1}{\sin^2 A}=\frac{bb^1+cc^1}{\sin^2 A}$$

$$\therefore \quad aa^1 = bb^1 + cc^1.$$

பயிற்சிகள் 17

பின் வரும் முற்றொருமைகளை நிறுவுக.

1. $a(\sin B-\sin C)+b(\sin C-\sin A)+c(\sin A-\sin B)=0.$
2. $a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0.$
3. $a^2(\cos^2 B-\cos^2 C)+b^2(\cos^2 C-\cos^2 A)+c^2(\cos^2 A-\cos^2 B)=0.$
4. $\cos A\sin(B-C)+\cos B\sin(C-A)+\cos C\sin(A-B)=0.$
5. $(b+c)\cos A+(c+a)\cos B+(a+b)\cos C=a+b+c.$
6. $\dfrac{a}{bc}+\dfrac{\cos A}{a}=\dfrac{b}{ca}+\dfrac{\cos B}{b}=\dfrac{c}{ab}+\dfrac{\cos C}{c}.$
7. $(a-b)\cos\dfrac{C}{2}=c\sin\dfrac{A-B}{2}.$
8. $(a+b)\sin\dfrac{C}{2}=c\cos\dfrac{A-B}{2}.$

9. $a \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B-C}{2} + b \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C-A}{2}$

$$+ c \sin \frac{C}{2} \sin \frac{A-B}{2} = 0.$$

10. $\frac{b-c}{a} \cos^2 \frac{A}{2} + \frac{c-a}{b} \cos^2 \frac{B}{2} + \frac{a-b}{c} \cos^2 \frac{C}{2} = 0.$

11. $(b-c) \cot \frac{A}{2} + (c-a) \cot \frac{B}{2} + (a-b) \cot \frac{C}{2} = 0.$

12. $\frac{\sin (B-C)}{\sin (B+C)} = \frac{b^2 - c^2}{a^2}.$

13. $\frac{a \sin (B-C)}{b^2 - c^2} = \frac{b \sin (C-A)}{c^2 - a^2} = \frac{c \sin (A-B)}{a^2 - b^2}.$

14. $\frac{b^2 - c^2}{a^2} \sin 2A + \frac{c^2 - a^2}{b^2} \sin 2B + \frac{a^2 - b^2}{c^2} \sin 2C = 0.$

15. $\frac{\cot B - \cot C}{b^2 - c^2} = \frac{\cot C - \cot A}{c^2 - a^2} = \frac{\cot A - \cot B}{a^2 - b^2}.$

16. $a^3 \sin (B-C) + b^3 \sin (C-A) + c^3 \sin (A-B) = 0.$

17. $\frac{a^2 \sin (B-C)}{\sin B + \sin C} + \frac{b^2 \sin (C-A)}{\sin C + \sin A} + \frac{c^2 \sin (A-B)}{\sin A + \sin B} = 0.$

18 $(a-b) \cos \frac{C}{2} = c \sin \frac{A-B}{2}.$

19. $(a+b) \sin \frac{C}{2} = c \cos \frac{A-B}{2}.$

20. $a \sin \left(\frac{A}{2} + B \right) = (b+c) \sin \frac{A}{2}.$

21. $\sin \left(B + \frac{C}{2} \right) \cos \frac{C}{2} = \frac{a+b}{b+c} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2}.$

22. $(a+b) \tan \frac{A-B}{2} + (b+c) \tan \frac{B-C}{2} + (c+a) \tan \frac{C-A}{2} = 0.$

23. $\frac{b^2 - c^2}{\cos B + \cos C} + \frac{c^2 - a^2}{\cos C + \cos A} + \frac{a^2 - b^2}{\cos A + \cos B} = 0.$

24. $\triangle = \frac{1}{4}(b^2 \sin 2C + c^2 \sin 2B)$.

25. $\triangle = \frac{1}{2} R^2 (\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$.

26. $\triangle = \frac{1}{4}(a^2 \cot A + b^2 \cot B + c^2 \cot C)$.

27. $s = 4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$.

28. $bc \cos A + ca \cos B + ab \cos C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$.

29. $\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\triangle}$.

30. $\frac{\cos^2 \frac{A}{2}}{a} + \frac{\cos^2 \frac{B}{2}}{b} + \frac{\cos^2 \frac{C}{2}}{c} = \frac{s^2}{abc}$.

31. $\frac{\tan B}{\tan C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2 - b^2 + c^2}$.

32. $\frac{2 \cot A + \cot B + \cot C}{\cot A - \cot B + 2 \cot C} = \frac{b^2 + c^2}{2\, b^2 - c^2}$.

33. $(s - a) \tan \frac{A}{2} = (s - b) \tan \frac{C}{2} = (s - c) \tan \frac{C}{2}$.

34. $a \cos (B - C) + b \cos (C - A) + c \cos (A - B) = \frac{abc}{R^2}$.

35. $a^3 \cos (B - C) + b^3 \cos (C - A) + c^3 \cos (A - B) = 3\, abc$.

36. $(a + b + c)\left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} \right) = 2c \cot \frac{C}{2}$.

37. $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2} = \frac{a - b + c}{a + b + c}$.

38. $\frac{1 + \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2}}{1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2}} = \frac{a + b}{c}$.

39. ABC முக்கோணத்தில் $\cos\theta = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\cos\frac{A}{2}$ என்றிருப்பின் $a=(b+c)\sin\theta$ என்று நிறுவுக.

40. ABC முக்கோணத்தில் $\tan\theta = \frac{2\sqrt{bc}}{b-c}\sin\frac{A}{2}$ என்றிருப்பின் $a^2=(b-c)^2\sec^2\theta$ என்று நிறுவுக.

41. $\cot A + \cot C = 2\cot B$ என்றிருப்பின் $a^2+c^2=2b^2$ என்று காட்டுக.

42. a, b, c என்பவை இசைத் தொடராக (**Harmonic progression**) இருப்பின் $\operatorname{cosec}^2\frac{A}{2}$, $\operatorname{cosec}^2\frac{B}{2}$, $\operatorname{cosec}^2\frac{C}{2}$ என்பவை கூட்டுத் தொடராய் (**arithmetical progression**) இருக்குமெனக் காட்டுக.

43. a, b, c என்பவை கூட்டுத்தொடராய் இருப்பின் $\cot\frac{A}{2}$, $\cot\frac{B}{2}$, $\cot\frac{C}{2}$ என்பவையும் கூட்டுத் தொடராய் இருக்குமெனக் காட்டுக.

44. $3\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=1$ என்றிருப்பின் a, b, c என்பவை கூட்டுத் தொடராய் இருக்குமென நிறுவுக.

45. ABC முக்கோணத்தில்

$$b^2+c^2-2bc\cos(60^\circ+A)=c^2+a^2-2ca\cos(60^\circ+B)$$
$$=a^2+b^2-2ab\cos(60^\circ+C)$$ என்று காட்டுக.

46. ABC, $A^1B^1C^1$ முக்கோணங்கள் கீழ்க் கண்ட தொடர்புடையனவாக இருக்கின்றன. $A^1=180^\circ-A$; $B^1=90^\circ-B$; $C^1=90^\circ-C$. அவ்விதமானால் ${a^1}^2(c^2-b^2)=a^2({b^1}^2-{c^1}^2)$ என்று காட்டுக.

47. ABC முக்கோணத்தில்

$$\left(a\sin^2\frac{B}{2}+b\sin^2\frac{A}{2}\right)\left(a\cos^2\frac{B}{2}+b\cos^2\frac{A}{2}\right)$$
$$=ab\cos^2\frac{C}{2}$$ என்று நிறுவுக.

48. **ABC** முக்கோணத்தில் $\angle B$ செங்கோணமாயின்

$$\tan\frac{A}{2}=\left(\frac{b-c}{b+c}\right)^{\frac{1}{2}}$$ என்று காட்டுக.

49. **ABC** முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் கூட்டுத் தொடராயும், முக்கோணத்தின் கோணங்களில் மிகப் பெரிய கோணமும், சிறிய கோணமும் முறையே **A, C** என்றும் இருப்பின் $4(1-\cos A)(1+\cos C)=\cos A+\cos C$ என்று நிறுவுக.

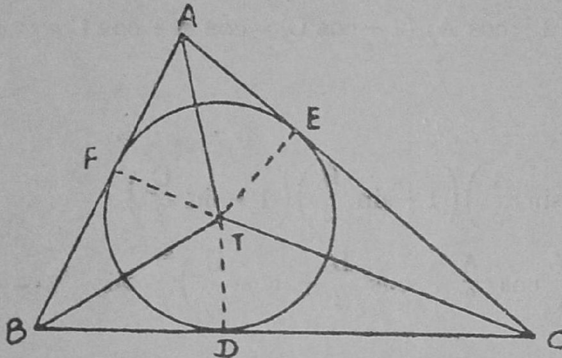
50. **ABC** முக்கோணத்தில்

$$2\left(1+\sin\frac{A}{2}\right)\left(1+\sin\frac{B}{2}\right)\left(1+\sin\frac{C}{2}\right)$$
$$=\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)^2$$ என்று நிறுவுக.

அதிகாரம் 8

முக்கோணத்தின் பண்புகள் (தொடர்ச்சி)

74. உள்வட்டம் (Incircle). ∠B, ∠C என்பனவற்றின் சம வெட்டிகளை வரைந்து அவை வெட்டும் புள்ளி **I**-லிருந்து **BC**-க்கு **ID** குத்துக்கோடு வரைக. **I**-ஐ மையமாகவும், **ID**-ஐ ஆரையாகவும் ஒரு வட்டம் வரைந்தால், அது **AC, AB** பக்கங்களை முறையே **E, F** புள்ளிகளில் தொடும். **IE**-ம், **IF**-ம் முறையே **AC, AB** பக்கங்களுக்குக் குத்துக்கோடாக இருக்கும். இவ்வட்டம் உள்வட்டம் (**in-circle**) என்றும், இதன் மையம் உள்மையம் (**in-centre**) என்றும், இதன் ஆரை உள் ஆரை (**in-radius**) என்றும் கூறப்படும். உள் ஆரை எப்பொழுதும் **r** என்ற எழுத்தினுல் குறிப்பிடப்படும்.



படம் 58

75. உள் ஆரையைக் காணுதல்.

(*a*) $$r = \frac{\Delta}{s}.$$

படம் 58-ஐ பார்க்கவும். $ID = IE = IF = r$.

$$\triangle BIC = \tfrac{1}{2} BC.ID = \tfrac{1}{2} a r.$$
$$\triangle CIA = \tfrac{1}{2} CA.IE = \tfrac{1}{2} b r.$$
$$\triangle AIB = \tfrac{1}{2} AB.IF = \tfrac{1}{2} c r.$$
$$\therefore \triangle BIC + \triangle CIA + \triangle AIB = \tfrac{1}{2} ar + \tfrac{1}{2} br + \tfrac{1}{2} cr.$$

(அ-து) $\triangle ABC = \tfrac{1}{2} r (a+b+c)$.

(அ-து) $\Delta = r s$.

$$\therefore r = \frac{\Delta}{s}.$$

(*b*) $r = (s-a)\tan\frac{A}{2} = (s-b)\tan\frac{B}{2} = (s-c)\tan\frac{C}{2}$.

படம் 58-ஐ பார்க்கவும்.

IBD, IBF முக்கோணங்களில்

IBD = IBF ($\because$ BI, $\angle$ B-ன் சமவெட்டி).

IDB = IFB ($\because$ ஒவ்வொன்றும் ஒரு செங்கோணம்).

IB பொது.

ஆகவே $\triangle IBD \equiv \triangle IBF$.

$\therefore$ BD = BF.

இவ்வாறே AE = AF ; CE = CD.

$BD + DC + CE + EA + AF + BF = a + b + c$.

(அ-து) $2BD + 2CD + 2AF = 2s$

$\therefore \quad 2AF = 2s - 2\,(BD + CD)$

$= 2\,(s-a)$.

$\therefore \quad AF = (s-a)$

இவ்வாறே $BD = s - b$; $CE = s - c$.

IBD முக்கோணத்தில்

$$\tan IDB = \tan\frac{B}{2} = \frac{ID}{BD}.$$

$$\therefore \quad ID = BD\tan\frac{B}{2}.$$

(அ-து) $r = (s-b)\tan\frac{B}{2}$.

இவ்வாறே $r = IE = (s-c)\tan\frac{C}{2}$.

$r = IF = (s-a)\tan\frac{A}{2}$.

$$\therefore \quad r = (s-a)\tan\frac{A}{2} = (s-b)\tan\frac{B}{2} = (s-c)\tan\frac{C}{2}.$$

(c) $\mathbf{r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}$.

படம் 58-ஐ பார்க்கவும்.

$$BC = BD + CD.$$

$$= ID \cot \frac{B}{2} + ID \cot \frac{C}{2}.$$

$$= ID \left(\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right)$$

$$\therefore \quad ID = \frac{BC}{\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2}}.$$

(அ-து) $$r = \frac{a}{\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2}}.$$

$$= \frac{a}{\frac{\cos \frac{B}{2}}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{\cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{C}{2}}}$$

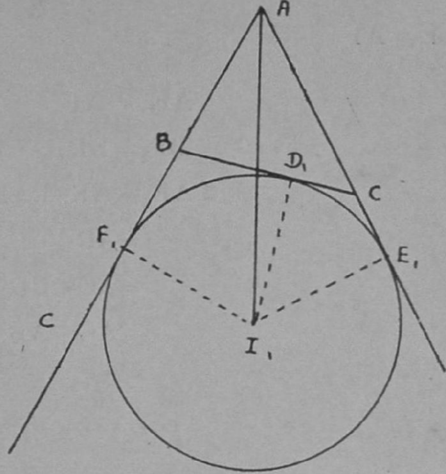
$$= \frac{a \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\sin \frac{C}{2} \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \sin \frac{B}{2}}$$

$$= \frac{a \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\sin \frac{(B+C)}{2}}$$

$$= \frac{2R \sin A \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}$$

$$= 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

76. வெளிவட்டங்கள் (Ex-circles). **AB, AC** பக்கங்களை நீட்டி வரும் வெளிக்கோணங்களின் சமவெட்டிகளை வரைக. இவை வெட்டும் புள்ளி I_1-லிருந்து BC-க்கு I_1D_1-ஐ குத்துக் கோடாக வரைந்து I_1-ஐ மையமாகவும், I_1D_1-ஐ ஆரையாகவும் ஒரு வட்டம் வரைக. இவ்வட்டம் **AC, AB** பக்கங்களின் நீட்சியை முறையே E_1, F_1 புள்ளிகளில் தொடின் I_1E_1-ம் I_1F_1-ம் முறையே **AC, AB** பக்கங்களுக்குக் குத்துக் கோடாக இருக்கும். இவ்வட்டத்தை **A**-யின் எதிரிலிருக்கும் வெளித்தொடுவட்டம் அல்லது **வெளிவட்டம்** என்றும், அதன் மையத்தை **வெளிமையம்** என்றும், அதன் ஆரையை **வெளிஆரை** என்றும் கூறுதல் வழக்கம். இம் மாதிரி **B**-க்கும், **C**-க்கும் எதிரில் வெளிவட்டங்கள் வரையலாம். இவ் வட்டங்களின் ஆரைகளை முறையே r_1, r_2, r_3 என்ற எழுத்துக்களால் குறிப்பிடுவது மரபு.



படம் 59

77. வெளி வட்டங்களின் ஆரைகள்.

$$(a) \quad r_1 = \frac{\Delta}{s-a}, \quad r_2 = \frac{\Delta}{s-b}, \quad r_3 = \frac{\Delta}{s-c}.$$

படம் 59-ஐ பார்க்கவும்.

$$I_1D_1 = I_1E_1 = I_1F_1 = r_1$$

$$\triangle ABC = \triangle AI_1B + \triangle CI_1A - \triangle BI_1C.$$

$$(\text{அ-து}) \quad \Delta = \tfrac{1}{2}cr_1 + \tfrac{1}{2}br_1 - \tfrac{1}{2}ar_1$$

$$= \tfrac{1}{2}r_1(c+b-a)$$

$$= \tfrac{1}{2}r_1(2s-2a)$$

$$= r_1(s-a)$$

ஆகவே $r_1 = \dfrac{\Delta}{s-a}$.

இவ்வாறே $r_2 = \dfrac{\Delta}{s-b}$, $r_3 = \dfrac{\Delta}{s-c}$.

(b) $r_1 = s \tan \frac{A}{2}$, $r_2 = s \tan \frac{B}{2}$, $r_3 = s \tan \frac{C}{2}$.

படம் 59-ஐ பார்க்கவும்.

AE_1, AF_1 என்பவை வெளி வட்டத்திற்குத் தொடுவரைகளாகையால்

$$AE_1 = AF_1.$$

இவ்வாறே $BF_1 = BD_1$; $CE_1 = CD_1$

$$\therefore \quad 2\,AE_1 = AE_1 + AF_1$$
$$= AC + CE_1 + AB + BF_1$$
$$= AC + CD_1 + AB + BD_1$$
$$= AC + AB + BC$$
$$= 2s.$$

ஆகவே $AE_1 = s$.

AE_1, AF_1 என்பவை வெளிவட்டத்தின் தொடுவரைகளாகையால்

$$I_1AE_1 = I_1AF_1 = \frac{A}{2}.$$

AE_1I_1 முக்கோணத்தில் $\tan \frac{A}{2} = \frac{I_1E_1}{AE_1}$.

$$\therefore \quad I_1E_1 = AE_1 \tan \frac{A}{2}$$

ஆகவே $r_1 = s \tan \frac{A}{2}$

இவ்வாறே $r_2 = s \tan \frac{B}{2}$; $r_3 = s \tan \frac{C}{2}$

(c) $r_1 = 4R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$

$r_2 = 4R \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$

$r_3 = 4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$

படம் 59-ஐ பார்க்கவும்.

$$BC = BD_1 + D_1C$$

$$= I_1D_1 \cot I_1BD_1 + I_1D_1 \cot I_1CD_1$$

$$= r_1 \cot\left(90^\circ - \frac{B}{2}\right) + r_1 \cot\left(90^\circ - \frac{C}{2}\right)$$

$$= r_1 \left(\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right)$$

$$= r_1 \left(\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}} + \frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}}\right)$$

$$= r_1 \frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$= r_1 \frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$\therefore \quad r_1 = \frac{BC\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{2R\sin A\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

$$= 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

இவ்வாறே $r_2 = 4R\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$

$$r_3 = 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

பயிற்சி 1. $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r}$ என்று நிறுவுக.

$r = \frac{\Delta}{s}$, $r_1 = \frac{\Delta}{s-a}$, $r_2 = \frac{\Delta}{s-b}$, $r_3 = \frac{\Delta}{s-c}$ என்று கண்டோம்.

ஆகவே $$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=\frac{s-a}{\Delta}+\frac{s-b}{\Delta}+\frac{s-c}{\Delta}$$

$$=\frac{3s-(a+b+c)}{\Delta}$$

$$=\frac{s}{\Delta}$$

$$=\frac{1}{r}.$$

பயிற்சி 2. $r_1+r_2+r_3-r=4R$ என்று காட்டுக.

முதல் முறை

$$r_1+r_2+r_3-r=4R\left(\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right.$$

$$\left.+\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$=4R\left\{\cos\frac{C}{2}\left(\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right)\right.$$

$$\left.+\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)\right\}$$

$$=4R\left(\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A+B}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$=4R\sin\frac{A+B+C}{2}$$

$$=4R.$$

இரண்டாவது முறை

$$r_1+r_2=\frac{\Delta}{s-a}+\frac{\Delta}{s-b}=\frac{\Delta(s-b+s-a)}{(s-a)(s-b)}$$

$$=\frac{c\Delta}{(s-a)(s-b)}$$

$$r_3-r=\frac{\Delta}{s-c}-\frac{\Delta}{s}=\frac{\Delta(s-\overline{s-c})}{s(s-c)}$$

$$=\frac{c\Delta}{s(s-c)}$$

$$\therefore \quad r_1 + r_2 - r_3 - r = \frac{c\triangle}{(s-a)(s-b)} + \frac{c\triangle}{s(s-c)}.$$

$$= \frac{c\triangle\ \{s(s-c) + (s-a)(s-b)\}}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \frac{c\triangle\ \{2s^2 - s(a+b+c) + ab\}}{\triangle^2}$$

$$= \frac{abc\triangle}{\triangle^2} = \frac{abc}{\triangle}$$

$$= 4R.$$

மூன்றுவது முறை

$$r_1 + r_2 = \frac{c\triangle}{(s-a)(s-b)} = \frac{c\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{(s-a)(s-b)}$$

$$= c\sqrt{\frac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}} = c \cot \frac{C}{2}$$

$$r_3 - r = \frac{c\triangle}{s(s-c)} = \frac{c\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s(s-c)}$$

$$= c\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}} = c \tan \frac{C}{2}$$

$$r_1 + r_2 + r_3 - r = c \cot \frac{C}{2} + c \tan \frac{C}{2}$$

$$= c\left(\frac{\cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{C}{2}} + \frac{\sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{C}{2}}\right)$$

$$= \frac{c}{\sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}$$

$$= \frac{2R \sin C}{\sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}} = 4R.$$

பயிற்சி 3. $\frac{r_1}{bc} + \frac{r_2}{ca} + \frac{r_3}{ab} = \frac{1}{r} - \frac{1}{2R}$ என்று நிறுவுக.

$$\frac{r_1}{bc} + \frac{r_2}{ca} + \frac{r_3}{ab} = \frac{1}{abc}\,(ar_1 + br_2 + cr_3).$$

$$= \frac{1}{abc}\,(2R \sin A\, r_1 + 2R \sin B\, r_2 + 2R \sin C\, r_3)$$

$$= \frac{2R}{abc}\,(r_1 \sin A + r_2 \sin B + r_3 \sin C)$$

$$= \frac{2Rs}{abc}\left(\tan\frac{A}{2}\sin A + \tan\frac{B}{2}\sin B + \tan\frac{C}{2}\tan C\right)$$

$$= \frac{4Rs}{abc}\left(\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2}\right)$$

$$= \frac{2Rs}{abc}\,(3 - \cos A - \cos B - \cos C)$$

$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ (பக்கம் 100 பயிற்சி 17)

$$= 1 + \frac{r}{R}.$$

ஆகவே $\frac{r_1}{bc} + \frac{r_2}{ca} + \frac{r_3}{ab} = \frac{2Rs}{abc}\left(3 - 1 - \frac{r}{R}\right)$

$$= \frac{2Rs}{4R\triangle}\left(2 - \frac{r}{R}\right)$$

$$= \frac{s}{2\triangle}\left(2 - \frac{r}{R}\right)$$

$$= \frac{1}{2r}\left(2 - \frac{r}{R}\right) = \frac{1}{r} - \frac{1}{2R}$$

பயிற்சி 4. $r_1 = r_2 + r_3 + r$ என்றிருப்பின் ABC செங்கோண முக்கோணமாகும்.

$$r_1 = r_2 + r_3 + r.$$

ஆகவே $r_1 - r = r_2 + r_3.$

(அ-து) $4R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$

$$= 4R \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + 4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$\therefore \sin \frac{A}{2}\left(\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right)$$

$$= \cos \frac{A}{2}\left(\sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right)$$

$$\therefore \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B+C}{2} = \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B+C}{2}$$

(அ-து) $\sin \left(\frac{A}{2} - \frac{B+C}{2} \right) = 0.$

$$\therefore \frac{A}{2} - \frac{B+C}{2} = 0.$$

$$\therefore A = B + C$$

ஆகவே **ABC** செங்கோண முக்கோணமாகும்.

பயிற்சி 5. a, b, c என்பவை கூட்டுத் தொடராயிருப்பின் r_1, r_2, r_3 என்பவை இசைத்தொடராயிருக்குமென நிறுவுக.

r_1, r_2, r_3 என்பவை இசைத்தொடர் என்று நிறுவுவதற்கு

$\frac{2}{r_2} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3}$ என்று நிறுவவேண்டும்.

(அ-து)

$$\frac{2}{4R \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{1}{4R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} + \frac{1}{4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}$$

(அ-து) $2 \cot \frac{B}{2} = \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{C}{2}$

a, b, c என்பவை கூட்டுத் தொடராயிருப்பதால்

$$2b = a + c.$$

$$\therefore 2 \sin B = \sin A + \sin C.$$

(அ-து) $\sin A - \sin B = \sin B - \sin C.$

(அ-து) $2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} = 2 \cos \frac{B+C}{2} \sin \frac{B-C}{2}.$

(அ-து) $\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2} = \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}$.

(அ-து) $\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$

$$= \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

(அ-து) $2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} +$

$$\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}.$$

இரு பக்கங்களையும் $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$-ஆல் வகுப்பின்

$$2\cot\frac{B}{2} = \cot\frac{C}{2} + \cot\frac{A}{2}.$$

ஆகவே r_1, r_2, r_3 என்பவை இசைத்தொடராகும்.

பயிற்சிகள் 18

பின் வருவனவற்றை நிறுவுக.

1. $\frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab} = \frac{1}{2Rr}$.
2. $\frac{b-c}{r_1} + \frac{c-a}{r_2} + \frac{a-b}{r_3} = 0$.
3. $r_2 + r_3 = a\cot\frac{A}{2}$.
4. $r + r_1 + r_2 - r_3 = 4R\cos C$.
5. $rr_1\cot\frac{A}{2} = \triangle = r_2r_3\tan\frac{A}{2}$.
6. $\frac{r_1 - r}{a} + \frac{r_2 - r}{b} = \frac{c}{r_3}$.
7. $\frac{ab - r_1r_2}{r_3} = \frac{\triangle}{s}$.
8. $r_1r_2 + r_1r_3 = as$.
9. $16R^2r_1r_2r_3 = a^2b^2c^2$.
10. $r_1r_2r_3 = r^3\cot^2\frac{A}{2}\cot^2\frac{B}{2}\cot^2\frac{C}{2}$.

11. $r_1 r_2 r_3 = rs^2$.

12. $(r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1) = s^2$.

13. $a = \dfrac{r_1 (r_2 + r_3)}{\sqrt{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1}}$

14. $(r_1 - r)(r_2 - r)(r_3 - r) = 4Rr^2$.

15. $(r_2 + r_3)(r_3 + r_1)(r_1 + r_2) = 4R(r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1)$.

16. $\tan \dfrac{A}{2} + \tan \dfrac{B}{2} + \tan \dfrac{C}{2} = \dfrac{r_1 + r_2 + r_3}{(r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1)^{\frac{1}{2}}}$.

17. $\left(\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2} + \dfrac{1}{r_3}\right)^2 = \dfrac{4}{r}\left(\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2} + \dfrac{1}{r_3}\right)$.

18. $\dfrac{1}{r^2} + \dfrac{1}{r_1^2} + \dfrac{1}{r_2^2} + \dfrac{1}{r_3^2} = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{\Delta^2}$.

19. $r^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 16R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$.

20. $(r_2 - r)(r_3 + r_1) = b^2$.

21. $\sum r_1 (\cos B - \cos C) = 0$.

22. $\sum a^2 (b + c - a) = \dfrac{2\,abc\,(R + r)}{R}$.

23. $\sum \cos A \cos B = \dfrac{r^2 + s^2 - 4R^2}{4R^2}$.

24. $\cos A \cos B \cos C = \dfrac{s^2 - (r + 2R)^2}{4R^2}$.

25. $a \cot A + b \cot B + c \cot C = 2(r + R)$.

26. $\Delta = Rr(\sin A + \sin B + \sin C)$.

$= 4Rr \cos \dfrac{A}{2} \cos \dfrac{B}{2} \cos \dfrac{C}{2}$.

27. $r_1 \cos^2 \dfrac{A}{2} + r_2 \cos^2 \dfrac{B}{2} + r_3 \cos^2 \dfrac{C}{2} = \dfrac{s^2}{2R}$.

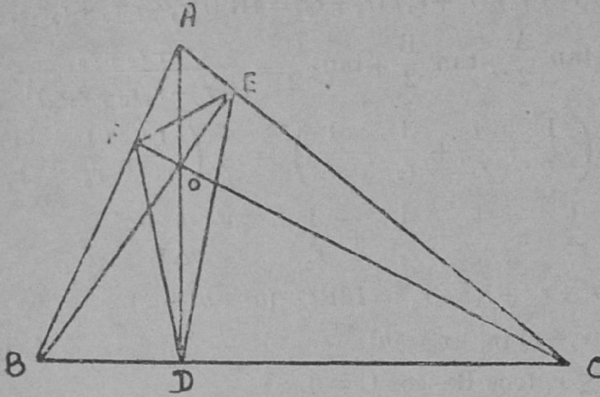
28. **ABC** முக்கோணத்தில் $r\,r_1 = r_2\,r_3$ என்று இருப்பின், அது செங்கோண முக்கோணமாகும்.

29. **ABC** முக்கோணத்தில் **C** செங்கோணமாக இருப்பின் $2(r + R) = a + b$.

30. **A B C** முக்கோணத்தில் $\left(1 - \dfrac{r_1}{r_2}\right)\left(1 - \dfrac{r_1}{r_3}\right) = 2$ என்றிருப்பின் அது செங்கோண முக்கோணமாகும்.

செங்கோட்டு மையமும் (ortho centre), செவ்வடி முக்கோணமும் (pedal triangle).

78. ABC முக்கோணத்தின் முனைகளிலிருந்து எதிர்ப்பக்கங் களுக்கு AD, BE, CF செங்கோடுகள் வரைந்தால் அவை ஒரு புள்ளி



படம் 60

வழிச் செல்லும். அப்புள்ளிக்குச் **செங்கோட்டு மையம்** என்று பெயர் DEF முக்கோணம் ABC முக்கோணத்தின் **செவ்வடி முக்கோணம்** என்று அழைக்கப்படும்.

79 முக்கோண முனைகளிலிருந்து செங்கோட்டு மையத்தின் தொலைகள்.

படம் 60-ஐ பார்க்கவும்.

OBD முக்கோணத்தில் $OD = BD \tan OBD$

$= BD \tan DAC$

$= BD \tan (90° - C)$

$= BD \cot C$

ABD முக்கோணத்தில் $BD = AB \cos B$

$= 2R \sin C \cos B$

ஆகவே $OD = 2R \sin C \cos B \cot C$

$= 2R \cos B \cos C$

இவ்வாறே $OE = 2R \cos C \cos A$, $OF = 2R \cos A \cos B$

மேலும் OCD முக்கோணத்தில் $OD = OC \sin OCD$

$$= OC \sin (90^\circ - B)$$

$$= OC \cos B$$

ஆகவே $2R \cos B \cos C = OC \cos B$

$$\therefore \quad OC = 2R \cos C$$

இவ்வாறே $OA = 2R \cos A$; $OB = 2R \cos B$

80. செவ்வடி முக்கோணத்தின் கோணங்களும் பக்கங்களும்.

படம் 60-ஐ பார்க்கவும்.

$$ODC = 90^\circ, \quad OEC = 90^\circ.$$

ஆகவே ODCE ஒரு வட்ட நாற்சிறையாகும்.

$$\therefore \quad ODE = OCE$$

இவ்வாறே $ODF = OBF$

ஆகவே $EDF = ODE + ODF$

$$= OCE + OBF$$

$$= 90^\circ - A + 90^\circ - A$$

$$= 180^\circ - 2A.$$

இவ்வாறே $DEF = 180^\circ - 2B$, $DEF = 180^\circ - 2C$

மேலும் AEF முக்கோணத்தில்

$$\frac{EF}{\sin A} = \frac{AE}{\sin AFE}$$

BCEF ஒரு வட்ட நாற்சிறை. ஆகையால் $AFE = C$.

$$\therefore \quad EF = \frac{AE \sin A}{\sin C}$$

$$= \frac{c \cos A \sin A}{\sin C}$$

$$= 2R \sin A \cos A$$

$= R \sin 2A$ அல்லது $a \cos A$

இவ்வாறே $DE = c \cos C = R \sin 2C$; $DF = b \cos B = R \sin 2B$.

81. செவ்வடி முக்கோணத்தின் சுற்றளவு.

$$EF = R \sin 2A, \quad DE = R \sin 2C, \quad DF = R \sin 2B.$$

ஆகவே சுற்றளவு $= R (\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$

$= 4R \sin A \sin B \sin C$ [பயிற்சி 16 பக்கம் 99]

82. செவ்வடி முக்கோணத்தின் பரப்பு.

$$\triangle \text{ DEF} = \tfrac{1}{2} \text{ DE. EF} \sin \text{DEF}$$
$$= \tfrac{1}{2} c \cos \text{C}.\ a \cos \text{A}. \sin (180^\circ - 2\text{B})$$
$$= \tfrac{1}{2} ac. \cos \text{C} \cos \text{A} \sin 2\text{B}$$
$$= ca. \cos \text{C} \cos \text{A}. \sin \text{B} \cos \text{B}$$
$$= 2\triangle \cos \text{A} \cos \text{B} \cos \text{C}$$

83. $\text{ODE} = \text{ODF} = 90^\circ - \text{A}$.

ஆகவே **OD** கோடு **EDF**-ன் உள் சமவெட்டி.

இவ்வாறே **OE, OF** என்பவையும் முறையே **DEF, EFD** கோணங்களின் உள்சமவெட்டிகளாகும். ஆகவே **O** செவ்வடிமுக்கோணத்தின் உள் மையமாகும்.

A, B, C புள்ளிகள் செவ்வடிமுக்கோணத்தின் வெளி மையங்களென எளிதில் நிறுவலாம். ஆகவே **ABC** முக்கோணம் செவ்வடி முக்கோணத்தின் வெளிவட்ட மைய முக்கோணமாகும் (**Ex-central triangle**).

செவ்வடி முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டம் **ABC**-யின் ஒன்பது புள்ளி வட்டமாகும் (**nine point circle**). ஆகவே செவ்வடி முக்கோணத்தின் சுற்று வட்ட ஆரை $\frac{R}{2}$.

பயிற்சிகள் 19

1. **DEF** முக்கோணம் **ABC**-யின் செவ்வடி முக்கோணமாயின் கீழ்க்கண்டவற்றை நிறுவுக.

   (1) அதன் பரப்பு $= \frac{1}{2}R^2 \sin 2A \sin 2B \sin 2C$.

   (2) அதன் உள் ஆரை $= 2R \cos A \cos B \cos C$.

   (3) அதன் சுற்றளவு $= \dfrac{abc}{2R^2}$.

   (4) **DEF, ABC** முக்கோணங்களின் சுற்றளவுகள் $r : R$ விகிதத்தில் இருக்கும்.

2. **ABC** முக்கோணத்தில் **AD, BE, CF** கோடுகள் செங்கோடுகளாயின் **AEF, BDF, CDE** முக்கோணங்களின் சுற்று வட்டவிட்டங்கள் முறையே $a \cot A$, $b \cot B$, $c \cot C$ என்று நிறுவுக.

3. **ABC** முக்கோணத்திற்கு, **O** செங்கோட்டு மையமாகவும், **DEF** செவ்வடிமுக்கோணமாகவும் இருப்பின் கீழ்க்கண்டவற்றை நிறுவுக.

(1) $\dfrac{OD}{AD} + \dfrac{OE}{BE} + \dfrac{OF}{CF} = 1.$

(2) $\dfrac{OD}{OD + a \cot A} + \dfrac{OE}{OE + b \cot B} + \dfrac{OF}{OF + c \cot C} = 1.$

(3) **AEF, BDF, CDE** முக்கோணங்களின் சுற்றுவட்ட ஆரைகளின் கூட்டுத்தொகை $R + r$ ஆகும்.

4. g, h, k என்பவை **ABC**-யின் செவ்வடி முக்கோணத்தின் பக்கங்களைக் குறிப்பிடுமாயின்

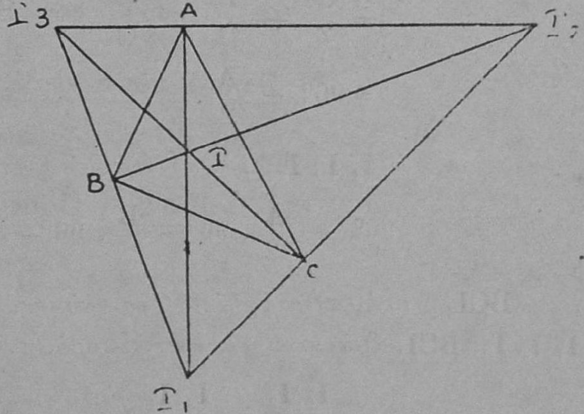
(1) $\dfrac{g}{a^2} + \dfrac{h}{b^2} + \dfrac{k}{c^2} = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}.$

(2) $\dfrac{(b^2 - c^2)}{a^2} g + \dfrac{(c^2 - a^2)}{b^2} h + \dfrac{(a^2 - b^2)}{c^2} k = 0$

என்று நிறுவுக.

84. வெளிமைய முக்கோணம் (Ex-central triangle).

I_1, I_2, I_3 புள்ளிகள் **ABC** முக்கோணத்தின் வெளிமையங்களாகும். I_1, I_2, I_3 முக்கோணம் **வெளிமைய முக்கோணம்** என்றுகூறப்படும். உள்மையத்தையும், வெளி மையங்களையும் அமைத்ததிலிருந்து கீழ்க்கண்டவற்றை எளிதில் நிறுவலாம்.



படம் 61

(1) I, I_1 புள்ளிகள் **BAC**-யின் உள் சமவெட்டியிலும், I, I_2 புள்ளிகள் **ABC**-யின் உள் சமவெட்டியிலும், I, I_3 புள்ளிகள் **ACB**-யின் உள் சமவெட்டியிலும் இருக்கின்றன,

(2) I_2, I_3 புள்ளிகள் BAC-யின் வெளி சமவெட்டியிலும்; I_3, I_1 புள்ளிகள் ABC யின் வெளிசமவெட்டியிலும்; I_1, I_2 புள்ளிகள் ACB-யின் சமவெட்டியிலும் இருக்கின்றன.

(3) AI_1, BI_2, CI_3 என்பவை முறையே $I_2 I_3$, $I_3 I_1$, $I_1 I_2$ என்பவற்றின் குத்துக்கோடுகளாக இருக்கின்றன. ஆகையால் ABC முக்கோணம், $I_1 I_2 I_3$ வெளிமையமுக்கோணத்தின் செவ்வடி முக்கோணமாகும். ஆகவே ABC-யின் சுற்று வட்டம் $I_1 I_2 I_3$-யின் ஒன்பது புள்ளி வட்டமாகும்.

(4) IBI_1, ICI_1 கோணங்கள் செங்கோணங்களாதலால், B, I, C, I_1 புள்ளிகள் ஒரே வட்டப் புள்ளிகளாகும் (concyclic points). இவ்வாறே $CIAI_2$, $AIBI_3$ என்பவையும் வட்ட நாற்சிறையாகும்.

(5) AI_1, BI_2, CI_3 கோடுகள் உள் மையத்தின் வழியே செல்கின்றன. ஆகவே உள் மையம் வெளிமையமுக்கோணத்தின் செங்கோட்டு மையமாகும்.

85. வெளிமையமுக்கோணத்தின் பக்கங்களும் கோணங்களும்.

படம் 61-ஐ பார்க்கவும்.

$$\begin{aligned} BI_1C &= BI_1I + CI_1I \\ &= BCI + CBI \\ &= \frac{C}{2} + \frac{B}{2} \\ &= 90^\circ - \frac{A}{2}. \end{aligned}$$

ஆகையால் $I_1 I_2 I_3$ முக்கோணத்தின் கோணங்கள்

$$90^\circ - \frac{A}{2},\ 90^\circ - \frac{B}{2},\ 90^\circ - \frac{C}{2}.$$

BCI_1 முக்கோணத்தின் கோணங்களும் இவையே. ஆகவே $I_1 I_2 I_3$, BCI_1 என்பவை வடிவொத்த முக்கோணங்களாகும்.

$$\therefore \quad \frac{I_2 I_3}{BC} = \frac{I_3 I_1}{I_1 C}.$$

$I_1 I_3 C$ முக்கோணத்தில்

$$\cos I_3 I_1 C = \frac{I_1 C}{I_3 I_1}$$

$$\therefore \quad \cos\left(90^\circ - \frac{A}{2}\right) = \frac{I_1C}{I_3\,I_1}$$

ஆகவே $$\frac{I_2\,I_3}{BC} = \frac{1}{\cos\left(90^\circ - \frac{A}{2}\right)} = \operatorname{cosec}\frac{A}{2}.$$

$$\therefore \quad I_2\,I_3 = BC \operatorname{cosec}\frac{A}{2}.$$

$$= 2R \sin A \operatorname{cosec}\frac{A}{2}$$

$$= 4R \cos\frac{A}{2}.$$

இவ்வாறே $I_3\,I_1 = 4R \cos\frac{B}{2}$; $I_1\,I_2 = 4R\cos\frac{C}{2}$.

86. வெளிமையமுக்கோணத்தின் பரப்பும் அதன் சுற்று வட்ட ஆரையும்.

$$\triangle\, I_1\,I_2\,I_3 = \tfrac{1}{2}\, I_2\,I_3\,.\,I_3\,I_1 \sin I_2\,I_3\,I_1$$

$$= \tfrac{1}{2}\,.\,4R\cos\frac{A}{2}\,.\,4R\cos\frac{B}{2}\sin\left(90^\circ - \frac{C}{2}\right)$$

$$= 8\,R^2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

$$= \frac{4R^2\sin A\sin B\sin C}{4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}.$$

$$= \frac{ab\sin C}{\frac{r}{R}} = \frac{2\triangle R}{r}.$$

$$= \frac{2R\triangle}{\frac{\triangle}{s}} = 2Rs.$$

சுற்று வட்ட ஆரை $$= \frac{I_2\,I_3}{2\sin I_2\,I_1\,I_3} = \frac{4R\cos\frac{A}{2}}{2\sin\left(90^\circ - \frac{A}{2}\right)}$$

$$= 2R.$$

அல்லது, ABC-யின் சுற்று வட்டம், $I_1 I_2 I_3$ முக்கோணத்தின் ஒன்பது புள்ளி வட்டமாதலால், $I_1 I_2 I_3$-யின் சுற்று வட்ட ஆரை ABC-யின் சுற்று வட்ட ஆரையின் இரண்டு மடங்காக இருக்கும்.

ஆகவே $I_1 I_2 I_3$-யின் சுற்று வட்ட ஆரை $= 2R$.

87. உள்மைய வெளிமையங்களின் இடைப்பட்ட தொலைகள்:— IBI_1, ICI_1 என்பவை செங்கோணமாதலால் II_1, BCI_1 முக்கோணத்தின் சுற்று வட்ட விட்டமாகும்.

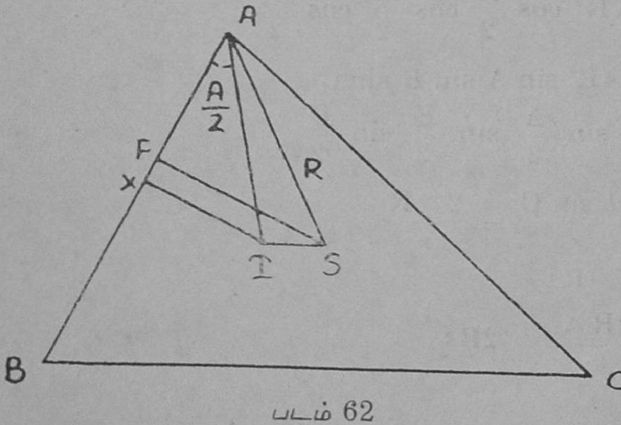
$$\text{ஆகவே } II_1 = \frac{BC}{\sin BI_1C} = \frac{a}{\sin\left(90^\circ - \frac{A}{2}\right)}$$

$$= \frac{2R \sin A}{\cos \frac{A}{2}} = 4R \sin \frac{A}{2}$$

$$\text{இவ்வாறே } II_2 = 4R \sin\frac{B}{2}; \quad II_3 = 4R \sin\frac{C}{2}$$

88. உள்மையத்தின், சுற்று வட்ட மையத்தின் இடைப்பட்ட தொலை.

முதன் முறை



படம் 62

I, S என்பவை முறையே உள்மையமும் சுற்று வட்ட மையமுமாகும். இவ்விரு புள்ளிகளிலிருந்து AB-க்கு IX, SF என்பவற்றைக் குத்துக்கோடுகளாக வரைக.

ஆகவே F, AB-யின் நடுப்புள்ளியாகும்.

$ASF = \frac{1}{2} BSA = C.$

$FAS = 90^\circ - ASF = 90^\circ - C.$

$$SAI = FAS - FAI = 90^\circ - C - \frac{A}{2}$$

$$= \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} - C - \frac{A}{2}$$

$$= \frac{B-C}{2}$$

AIX முக்கோணத்தில் $AI = \dfrac{IX}{\sin IAX} = \dfrac{r}{\sin \frac{A}{2}}$

$$= 4R \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

ASI முக்கோணத்தில்

$$SI^2 = AS^2 + AI^2 - 2AS.\ AI \cos SAI$$

$$= R^2 + 16R^2 \sin^2\frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2} - 8R^2 \sin\frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{B-C}{2}$$

$$= R^2 + 8R^2 \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}\left(2 \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2} - \cos\frac{B-C}{2}\right)$$

$$= R^2 + 8R^2 \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}\left(\sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2} - \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}\right)$$

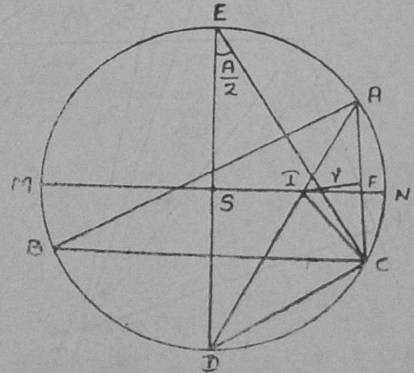
$$= R^2 - 8R^2 \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2} \cos\frac{B+C}{2}.$$

$$= R^2 - 8R^2 \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}.$$

$$= R^2 - 2Rr.$$

இரண்டாவது முறை

S-ஐ சுற்று வட்ட மையமென்றும், I-ஐ உள் மையமென்றும் AI-ன் நீட்சி, சுற்று வட்டத்தை D-ல் வெட்டுமென்றும் கொள்வோம். CI-ஐயும் CD-ஐயும் இணைக்க. DS-ஐ இணைத்து அதன் நீட்சி, சுற்று வட்டத்தை E-ல் வெட்டும்படி நீட்டவும். CE-ஐ இணைக்க.



படம் 63

அப்பொழுது $DIC = IAC + ICA$

$$= \frac{A}{2} + \frac{C}{2}$$

$$DCI = ICB + BCD$$

$$= \frac{C}{2} + BAD$$

$$= \frac{C}{2} + \frac{A}{2}$$

$$\therefore \quad DCI = DIC.$$

ஆகவே $DI = DC = DE \sin \frac{A}{2} = 2R \sin \frac{A}{2}$.

மேலும் $AI = IF \operatorname{cosec} \frac{A}{2} = r \operatorname{cosec} \frac{A}{2}$.

$$\therefore \quad AI. \, ID = 2R \sin \frac{A}{2} \times r \operatorname{cosec} \frac{A}{2} = 2Rr.$$

SI-யின் நீட்சி, சுற்றுவட்டத்தை M, N புள்ளிகளில் வெட்டும்படி நீட்டுக.

$$\therefore \quad AI. \, ID = MI. \, IN.$$

$$= (R + SI)(R - SI).$$

$$\therefore \quad 2Rr = R^2 - SI^2$$

$$\therefore \quad SI^2 = R^2 - 2Rr.$$

89. வெளிமைய, சுற்றுவட்ட மையங்களின், இடைப்பட்ட தொலை.

முதல் முறை.

$$I_1AS = IAS = \frac{B - C}{2}$$

என்று முன் தொகுதியில் நிறுவினோம்.

$$AI_1 = \frac{r_1}{\sin \frac{A}{2}}$$

$$= 4R \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

படம் 64

$$SI_1^2 = AS^2 + AI_1^2 - 2AS.\ AI_1 \cos I_1AS$$

$$= R^2 + 16R^2 \cos^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2} - 8R^2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \cos \frac{B-C}{2}$$

$$= R^2 + 8R^2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \left(2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - \cos \frac{B-C}{2} \right)$$

$$= R^2 + 8R^2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \left(\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right)$$

$$= R^2 + 8R^2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \cos \frac{B+C}{2}$$

$$= R^2 + 8R^2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2}$$

$$= \mathbf{R^2 + 2Rr_1}$$

இவ்வாறே $SI_2^2 = R^2 + 2Rr_2$; $SI_3^2 = R^2 + 2Rr_3$

இரண்டாவது முறை

முன் தொகுதியில்

$$DI = DC = 2R \sin \frac{A}{2}$$

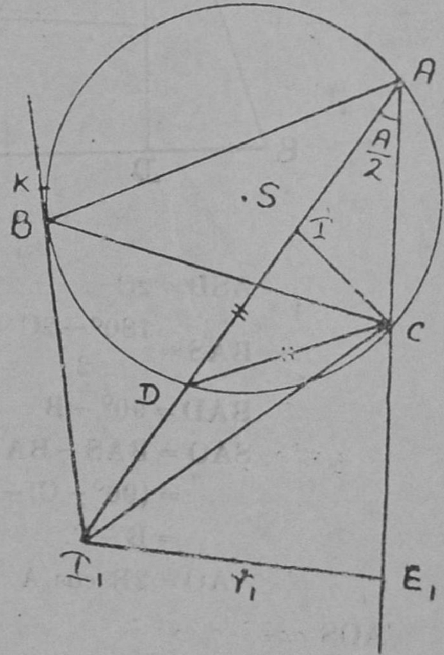
என்று நிறுவினோம்.

ICI_1 முக்கோணத்தில் $ICI_1 = 90°$,

$DC = DI$ என்பதால்

$$DI = DC = DI_1$$

ஆகவே, $DI_1 = 2R \sin \frac{A}{2}$



படம் 65

AI_1E_1 முக்கோணத்தில்

$$\sin \frac{A}{2} = \frac{r_1}{AI_1}$$

$$\therefore \quad AI_1 = r_1 \operatorname{cosec} \frac{A}{2}$$

I_1-லிருந்து சுற்றுவட்டத்திற்கு I_1K தொடுவரை வரைந்தால்

$$I_1K^2 = SI_1^2 - SK^2$$

$$= SI_1^2 - R^2$$

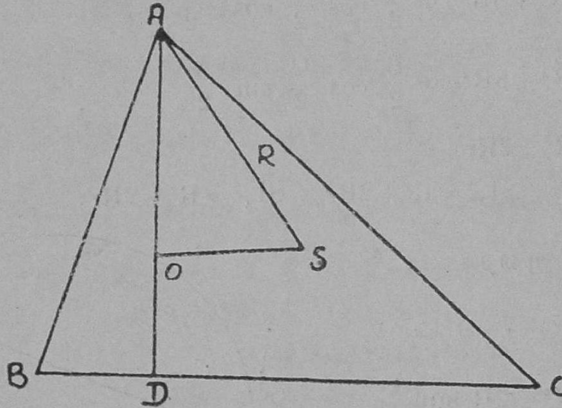
மேலும் $I_1K^2 = I_1D . I_1A$

$$= 2R \sin\frac{A}{2} . r_1 \operatorname{cosec}\frac{A}{2}$$

$$= 2Rr_1$$

ஆகவே $SI_1^2 = R^2 + 2Rr_1$.

90. சுற்றுவட்ட மைய, செங்கோட்டுமையங்களின் இடைப்பட்ட தொலை.



படம் 66

$$ASB = 2C$$

$$\therefore \quad BAS = \frac{180° - 2C}{2} = 90° - C$$

$$BAD = 90° - B$$

ஆகவே $SAO = BAS - BAD$

$$= (90° - C) - (90° - B)$$

$$= B - C.$$

$AO = 2R \cos A$ (தொகுதி 79—பக்கம் 141)

AOS முக்கோணத்தில்

$$SO^2 = SA^2 + OA^2 - 2SA . OA \cos SAO$$

$$= R^2 + 4R^2 \cos^2 A - 2 . R . 2R \cos A \cos (B - C)$$

$$= R^2 + 4R^2 \cos A \{\cos A - \cos (B - C)\}$$

$$= R^2 - 4R^2 \cos A \{\cos (B + C) + \cos (B - C)\}$$

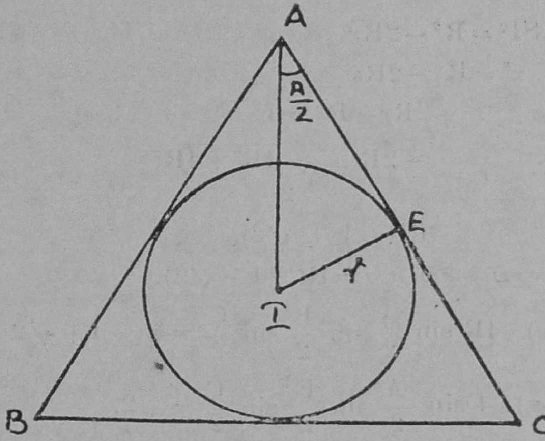
$$= R^2 - 8R^2 \cos A \cos B \cos C.$$

$$\therefore \quad SO = R\sqrt{1 - 8 \cos A \cos B \cos C}.$$

பயிற்சி 6. $SI^2+SI_1^2+SI_2^2+SI_3^2=12R^2$ என்று நிறுவுக.

$$SI^2+SI_1^2+SI_2^2+SI_3^2$$
$$=R^2-2Rr+R^2+2Rr_1+R^2+2Rr_2+R^2+2Rr_3$$
$$=4R^2+2R(r_1+r_2+r_3-r).$$
$$=4R^2+2R.\ 4R \text{ (பக்கம் 114 பயிற்சி 2).}$$
$$=12R^2.$$

பயிற்சி 7. $a\ AI^2+b\ BI^2+c\ CI^2=abc$ என்று காட்டுக.



படம் 67

$$AI = \frac{IE}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}$$

$$\therefore\quad aAI^2 = 2R\sin A.\ \frac{r^2}{\sin^2\frac{A}{2}}$$

$$=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}.\ \frac{r^2}{\sin^2\frac{A}{2}}$$

$$=4Rr^2\cot\frac{A}{2}$$

$$=4Rr\ AE$$

$$=4Rr\ (s-a).$$

இவ்வாறே $b\,BI^2 = 4Rr(s-b)$; $c\,CI^2 = 4R\,r(s-c)$.

ஆகவே $aAI^2 + bBI^2 + cCI^2 = 4Rr(s-a) + 4Rr(s-b) + 4Rr(s-c)$

$$= 4Rr.\,(3s - \overline{a+b+c})$$

$$= 4Rrs = 4R\triangle$$

$$= abc$$

பயிற்சி 8. ஒரு முக்கோணத்தின் உள்வட்டம் சுற்றுவட்டமையை வழியாகச் செல்லுமாயின் $\cos A + \cos B + \cos C = \sqrt{2}$ என்று நிறுவுக.

உள்வட்டம் சுற்றுவட்டமையை வழியாகச் செல்லுமானல்

$$SI = r.$$

$$SI^2 = R^2 - 2Rr.$$

$$\therefore \quad r^2 = R^2 - 2Rr.$$

(அ-து) $r^2 + 2Rr - R^2 = 0.$

$$\therefore \quad r = \frac{-2R \pm \sqrt{4R^2 + 4R^2}}{2}$$

$$= R(-1 \pm \sqrt{2}).$$

r மிகையாகையால் $r = R(-1 + \sqrt{2})$.

(அ-து) $4R \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = R(-1 + \sqrt{2}).$

(அ-து) $4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \sqrt{2}.$

(அ-து) $\cos A + \cos B + \cos C = \sqrt{2}$, (பக்கம் 86, பயிற்சி 17)

பயிற்சி 9. $\frac{r_1}{bc} + \frac{r_2}{ca} + \frac{r_3}{ab} = \frac{1}{r} - \frac{1}{2R}$ என்று காட்டுக.

$$R = \frac{abc}{4\triangle} \quad \therefore \quad \frac{1}{2R} = \frac{2\triangle}{abc}$$

$$\frac{r_1}{bc} + \frac{r_2}{ca} + \frac{r_3}{ab} + \frac{1}{2R} = \frac{2}{abc}\left(\tfrac{1}{2}ar_1 + \tfrac{1}{2}br_2 + \tfrac{1}{2}cr_3 + \triangle\right).$$

$$= \frac{2}{abc}(BI_1C + CI_2A + AI_3B + ABC).$$

$$= \frac{2}{abc} I_1I_2I_3.$$

$$= \frac{2}{abc} \times 2Rs. \quad \text{(தொகுதி 86)}$$

$$= \frac{4Rs}{abc} = \frac{s}{\triangle} = \frac{1}{r}.$$

பயிற்சிகள் 20

பின் வருவனவற்றை நிறுவுக.

1. (a) $AI = 4R \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$.

   (b) $AI_1 = 4R \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$.

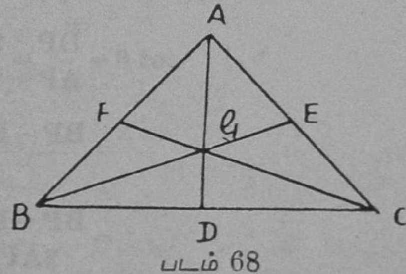
   (c) $BI_1 = 4R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2}$.

   (d) $CI_1 = 4R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}$.

2. $r.\ II_1.\ II_2.\ II_3 = 4R.\ IA.\ IB.\ IC.$
3. $a\ AI_1^2 - b\ BI_1^2 - c\ CI_1^2 = abc.$
4. $r^3\ II_1.\ II_2.\ II_3 = IA^2.\ IB^2.\ IC^2.$
5. $\triangle\ I_1I_2I_3 = \frac{abc\ (a+b+c)}{4\ \triangle}.$
6. $IA.\ IB.\ IC. = 4R \triangle \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} = 4Rr^2.$
7. $AI^2 \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) + BI^2 \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right) + CI^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = 0.$
8. ABC முக்கோணத்தில் $R = 2r$ என்றிருப்பின் அது சமபக்க முக்கோணமாகும்.

91. நடுக்கோடுகளும், நடுக்கோட்டு மையமும்.

ABC முக்கோணத்தில் AD, BE, CF என்பவை நடுக்கோடுகளாகும் (**medians**). இவை மூன்றும் ஒரு புள்ளி வழியே செல்லும். அப் புள்ளிக்கு **நடுக்கோட்டுமையம்** (**centroid**) எனப் பெயர். மேலும் முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் நடுக்கோடுகள் ஒவ்வொன்றையும் மூன்றில் ஒரு பாகமாகப் பிரிக்கும்.



படம் 68

ஆகவே $AG = \frac{2}{3}\ AD$

$BG = \frac{2}{3}\ BE$

$CG = \frac{2}{3}\ CF$

92. நடுக்கோடுகளின் நீளங்கள்.

படம் 68-ஐ பார்க்கவும்.

$$2AD^2 + 2BD^2 = AB^2 + AC^2 \quad \text{(அப்பலோனியசின் தேற்றம்)}$$

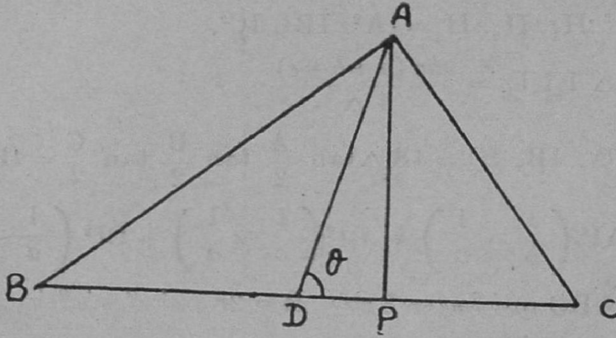
$$\therefore \quad 2AD^2 + 2\left(\tfrac{1}{2}a\right)^2 = b^2 + c^2$$

$$\therefore \quad 4AD^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$$

$$\therefore \quad AD = \tfrac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

இவ்வாறே $BE = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2}$; $CF = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$

93. AD நடுக்கோடு BC-யோடு பிறப்பிக்கும் கோணங்கள்.



படம் 69

(*a*) A-யிலிருந்து AP செங்கோட்டினை வரைக.

ADP முக்கோணத்தில்

$$\cot\theta = \frac{DP}{AP} = \frac{2DP}{2AP}$$

$$= \frac{BP - BD + DC - PC}{2AP}$$

$$= \frac{BP - PC}{2AP}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\frac{BP}{AP} - \frac{PC}{AP}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\,(\cot B - \cot C)$$

இரண்டாவது முறை

$$\cot B = \frac{c^2+a^2-b^2}{4\triangle}\ ;\ \cot C = \frac{a^2+b^2-c^2}{4\triangle}$$ (பயிற்சி 1 பக்கம் 117)

ADC முக்கோணத்தில்

$$\cot ADC = \frac{AD^2+CD^2-AC^2}{4\triangle ADC}$$

$$= \frac{\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}+\frac{a^2}{4}-b^2}{2\triangle}$$

$$= \frac{c^2-b^2}{4\triangle}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{4\triangle} - \frac{a^2+b^2-c^2}{4\triangle}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(\cot B - \cot C)$$

(*b*) மேலும் ADC முக்கோணத்தில்

$$\frac{\sin\theta}{AC} = \frac{\sin C}{AD}$$

$$\therefore \quad \sin\theta = \frac{AC \sin C}{AD}$$

$$= \frac{b \sin C}{\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}$$

$$= \frac{2b \sin C}{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}$$

பயிற்சி 10. $\cot CAD = 2\cot A + \cot C$ என்று நிறுவுக.

படம் 69 ஐ பார்க்கவும்.

$$\cot CAD = \frac{AD^2+AC^2-CD^2}{4\triangle ADC}$$

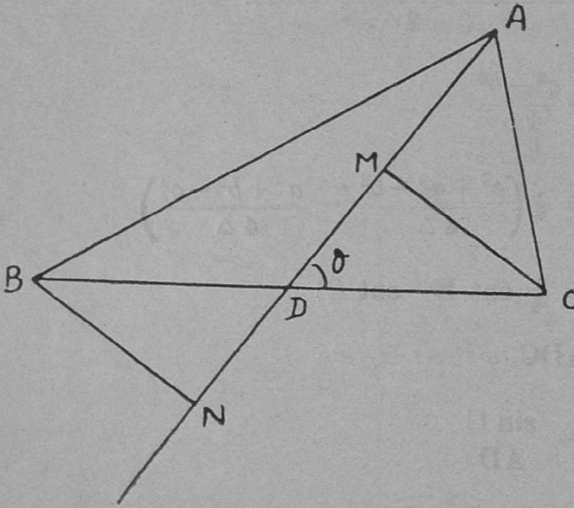
$$= \frac{\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4} + b^2 - \frac{a^2}{4}}{2\triangle}$$

$$= \frac{3b^2+c^2-a^2}{4\triangle}$$

$$= \frac{2(b^2+c^2-a^2)}{4\triangle} + \frac{b^2+a^2-c^2}{4\triangle}$$

$$= 2\cot A + \cot C.$$

பயிற்சி 11. $\cot BAD - \cot CAD = \cot B - \cot C.$



படம் 70

CM, BN என்பவற்றை AD-க்குக் குத்துக் கோடுகளாக வரைக.

அப்பொழுது $\triangle BDN \equiv \triangle CDM$

$\therefore \quad BN = CM$; $DM = DN$.

$$\cot BAD - \cot CAD = \frac{AN}{BN} - \frac{AM}{CM}$$

$$= \frac{AN - AM}{CM}$$

$$= \frac{2DM}{CM}$$

$$= 2\cot\theta$$

$$= \cot B - \cot C$$

[தொகுதி 93(a)]

பயிற்சிகள் 21

1. **A**-லிருந்து **BC**-க்கு வரையும் நடுக்கோட்டின் நீளம் $\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos A}$ என்று நிறுவுக.

2. **ABC** முக்கோணத்தில் **BC**-யின் நடுப்புள்ளி **D** ஆகவும் ADC $=\theta$ ஆகவும் இருப்பின்

   (1) $AB^2-AC^2=2AD.\,BC\cos\theta$.

   (2) $\tan\theta=\dfrac{2bc\sin A}{b^2\sim c^2}$.

   (3) $\cot DAB+\cot CAD=4\cot A+\cot B+\cot C$ என்று நிறுவுக.

3. l, m, n என்பவை ஒரு முக்கோணத்தின் நடுக்கோடுகளைக் குறிப்பிடுமாயின் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

   (1) $4(l^2+m^2+n^2)=3(a^2+b^2+c^2)$.

   (2) $(b^2-c^2)l^2+(c^2-a^2)m^2+(a^2-b^2)n^2=0$.

   (3) $16(l^4+m^4+n^4)=9(a^4+b^4+c^4)$.

4. **BE, CF** நடுக்கோடுகள் **G** புள்ளி வழியாகச் செல்லுமாயின்

$$\tan BGC=\frac{12\triangle}{b^2+c^2-5a^2}$$ என்று நிறுவுக.

$$\left[\begin{array}{l} a^2=BG^2+CG^2-2BG.\,CG\cos BGC \\ \tfrac{1}{2}BG.\,CG\sin BGC=\triangle BGC=\dfrac{\triangle}{3}\end{array}\right].$$

94. கோணங்களின் சமவெட்டிகள்.

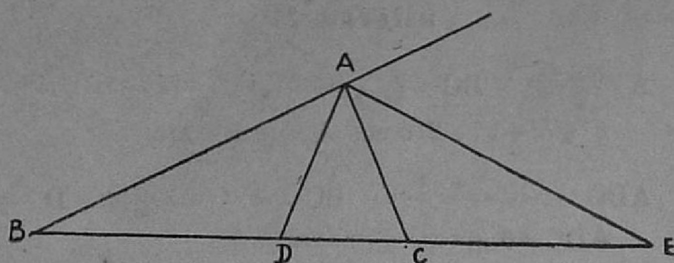
(*a*) **உள் சமவெட்டிகள்.**

AD, $\angle A$-யின் உள் சமவெட்டி.

$$\therefore\ \frac{BD}{DC}=\frac{c}{b}$$

$$\therefore\ \frac{BD}{c}=\frac{DC}{b}=\frac{BD+DC}{c+b}$$

$$=\frac{BC}{c+b}=\frac{a}{c+b}.$$



படம் 71

AD-யின் நீளம் l என்று கொள்வோம்.

$$\triangle ABD + \triangle ADC = \triangle ABC.$$

(அ-து) $\frac{1}{2}$ AB. AD sin BAD + $\frac{1}{2}$ AC. AD. sin CAD = $\frac{1}{2}bc$ sin A.

(அ-து) $\frac{1}{2}cl \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2}bl \sin \frac{A}{2} = \frac{1}{2}bc \sin A.$

(அ-து) $l \sin \frac{A}{2}(b+c) = bc \sin A.$

$$\therefore\ l = \frac{bc \sin A}{(b+c)\sin\frac{A}{2}} = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$$

இவ்வாறே மற்ற இரு உள் சமவெட்டிகளின் நீளங்களைக் காணலாம்.

(b) **வெளி சம வெட்டிகள்** :—**AE** என்பதை $\angle$ **A**-யின் வெளி சமவெட்டியாகவும், அதன் நீளத்தை l_1 ஆகவும் கொள்வோம்.

$$\triangle ABE - \triangle ACE = \triangle ABC.$$

(அது) $\frac{1}{2}$ AB. AE. sin BAE $-\frac{1}{2}$ AC. AE. sin CAE $= \frac{1}{2}bc$ sin A.

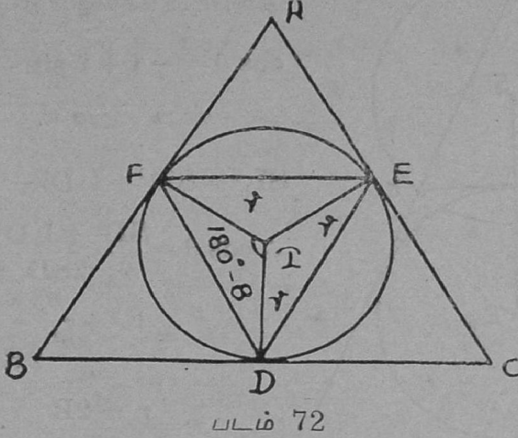
(அது) $\frac{1}{2}cl_1 \sin\left(90^\circ + \frac{A}{2}\right) - \frac{1}{2}bl_1 \sin\left(90^\circ - \frac{A}{2}\right) = \frac{1}{2}bc \sin A$

(அது) $l_1(c-b)\cos\frac{A}{2} = bc \sin A.$

$$\therefore\ l_1 = \frac{2bc}{c-b}\sin\frac{A}{2}$$

பயிற்சி 12.

படம் 72-ல் $\dfrac{\triangle\ DEF}{\triangle\ ABC} = \dfrac{r}{2R}$ என்று நிறுவுக.



படம் 72

$$\triangle\ DEF = \triangle IDF + \triangle IFE + \triangle IED.$$

$$\triangle\ IDF = \tfrac{1}{2}\ ID.\ IF.\ \sin DIF.$$
$$= \tfrac{1}{2} r^2 \sin (180° - B)$$
$$= \tfrac{1}{2} r^2 \sin B.$$

இவ்வாறே $\triangle IFE = \frac{1}{2} r^2 \sin A$; $\triangle\ IED = \frac{1}{2} r^2 \sin C$

$$\therefore \quad \triangle DEF = \tfrac{1}{2} r^2 (\sin A + \sin B + \sin C)$$

$$= 2r^2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$ (பக்கம் 102 பயிற்சி 1)

$$\triangle\ ABC = \frac{abc}{4R} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C.$$

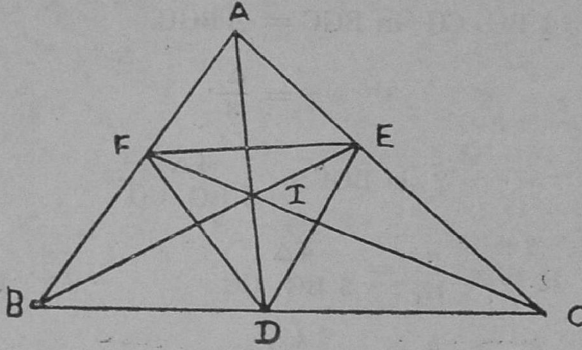
$$\therefore \quad \frac{\triangle\ DEF}{\triangle\ ABC} = \frac{2r^2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{2R^2 \sin A \sin B \sin C}$$

$$= \frac{r^2}{8R^2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}$$

$$= \frac{r^2}{2R\, r}$$

$$= \frac{r}{2R}$$

பயிற்சி 15. **AD, BE, CF** என்பவை **ABC** முக்கோணத்தின் கோணங்களின் சமவெட்டிகளாயின் **ABC, DEF** முக்கோணங்களின் பரப்புகளின் விகிதம் $\dfrac{2abc}{(b+c)(c+a)(a+b)}$ என்று நிறுவுக.



படம் 75

AD, $\angle$ **A**-யின் சமவெட்டியாகையால் $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{c}{b}$.

$$\therefore \quad \frac{BD}{c} = \frac{DC}{b} = \frac{a}{b+c}.$$

$$\therefore \quad BD = \frac{ac}{b+b}; \; DC = \frac{ab}{b+c}.$$

இவ்வாறே $BF = \dfrac{ac}{a+b}$.

$$\therefore \quad \triangle BDF = \tfrac{1}{2}\, BD.\, BF.\, \sin B.$$

$$= \tfrac{1}{2}\, \frac{c^2a^2 \sin B}{(b+c)\,(a+b)}.$$

$$= \frac{\triangle ca}{(b+c)\,(a+b)}.$$

இவ்வாறே $\triangle CDE = \dfrac{\triangle ab}{(c+a)(b+c)}$; $\triangle AFE = \dfrac{\triangle bc}{(a+b)(c+a)}$

$$\triangle DEF = \triangle ABC - \triangle BDF - \triangle CDE - \triangle AFE$$

$$= \triangle - \frac{\triangle ca}{(b+c)(a+b)} - \frac{\triangle ab}{(c+a)(b+c)} - \frac{\triangle bc}{(a+b)(c+a)}$$

$$\therefore \quad \frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = 1 - \Sigma \frac{bc}{(a+b)(c+a)}$$

$$= \frac{(b+c)\,(c+a)\,(a+b) - \Sigma\, bc\,(b+c)}{(b+c)\,(c+a)\,(a+b)}.$$

$$= \frac{2abc}{(b+c)\,(c+a)\,(a+b)}.$$

பல்வகைப் பயிற்சிகள் 22

1. செங்கோட்டுமையம் உள்மையம் இவற்றின் இடைப்பட்ட தொலை $\sqrt{2r^2 - 4R^2 \cos A \cos B \cos C}$ என்று நிறுவுக.

2. ABC முக்கோணத்தில் உள்வட்டம் செங்கோட்டுமையம் வழிச் செல்லின்
$\cos A \cos B \cos C = 4 \sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2}$ என்று நிறுவுக.

3. A-யிலிருந்து ஒன்பது புள்ளி மையத்தின் தொலை
$\frac{R}{2}\sqrt{1 + 8 \cos A \sin B \sin C}$ என்று நிறுவுக.

4. α, β, γ என்பவை ஒரு முக்கோணத்தின் ஒன்பது புள்ளி மையத்திலிருந்து முனைகளுக்குள்ள தொலைகளையும், g என்பது அதிலிருந்து செங்கோட்டுமையத்தின் தொலையையும் குறிப்பிடுமாயின் $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + g^2 = 3R^2$ என்று நிறுவுக.

5. N புள்ளி ஒன்பது புள்ளி மையமாகவும், K ஒன்பது புள்ளி வட்ட ஆரையாகவும், S சுற்றுவட்டமையமாகவும் இருப்பின் $NA^2 + NB^2 + NC^2 + NS^2 = 12 K^2$ என்று காட்டுக.

6. S புள்ளி ABC முக்கோணத்தின் சுற்று வட்ட மையம். AS கோடு BC-ஐ D புள்ளியில் வெட்டின்
$AD (\sin 2B + \sin 2C) = 4R \sin A \sin B \sin C$
என்று காட்டுக.

7. A, B, C என்பவை மூன்று வெளித்தொடுவட்டங்களின் தொடு புள்ளிகளாகும். அவ்வட்டங்களின் மையங்களால் அமையும் முக்கோணத்தின் பரப்பு $R^2 \tan A \tan B \tan C$ என்று நிறுவுக.

8. சுற்று வட்டம் வெளிவட்டங்களை வெட்டும் புள்ளிகளில் அமையும் கோணங்கள் θ_1, θ_2, θ_3 என்ற குறுங்கோணங்களாயின்
$\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_3 = 1 - 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$
என்று நிறுவுக.

9. **ABC** முக்கோணத்தில் **AD, BE, CF** என்பவை செங்கோடுகளும், **O** செங்கோட்டு மையமுமாகும். **L, M, N** புள்ளிகள் முறையே **OA, OB, OC**-யின் நடுப் புள்ளிகளாயின் **DNELFM** அறுகோணத்தின் சுற்றளவு $2(\mathbf{R}+r)$ என்று நிறுவுக.

10. x, y, z என்பவை சுற்றுவட்ட மையத்திலிருந்து **ABC**-யின் பக்கங்களுக்கு வரையும் குத்துக்கோடுகளின் நீளங்களைக் குறிப்பிடுமாயின் $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{abc}{4xyz}$ என்று நிறுவுக.

11. **D** புள்ளி **BC** பக்கத்திலிருக்குமாயின் **ADB, ADC** முக்கோணங்களின் சுற்றுவட்ட மையங்களின் இடையிட்ட தொலை $\frac{a}{2}$ **cosec ADB** என்று நிறுவுக.

12. $\angle$**A**-யின் உள் சமவெட்டி **BC**-ஐ **D** புள்ளியிலும், **C**-யின் வழியாகச் செல்லும் சுற்றுவட்டத்தின் விட்டம் **AD**-ஐ **K**-யிலும் வெட்டின் $\mathbf{KD} = \frac{ab}{b+c}\,\frac{\cos A}{\cos\left(\frac{A}{2}-B\right)}$ என்று நிறுவுக.

13. **ABC**-யின் கோணங்களின் உள் சமவெட்டிகள் அதன் சுற்றுவட்டத்தை **D, E, F** புள்ளிகளில் வெட்டின் **DEF, ABC** முக்கோணங்களின் பரப்புகள் **R : 2r** விகிதத்திலிருக்குமென நிறுவுக.

14. Δ என்பது **ABC**-யின் பரப்பினையும், Δ_0 உள்வட்டம் முக்கோணங்களின் பக்கங்களைத் தொடும் புள்ளிகளால் அமையும் முக்கோணத்தின் பரப்பினையும்; $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ இவ்விதமாக வெளிவட்டங்களால் ஏற்படும் முக்கோணங்களின் பரப்புகளையும் குறிப்பிடுமாயின் $\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3-\Delta_0=\Delta$ என்று நிறுவுக.

15. p, q, r என்பவை ஒரு முக்கோணத்தின் உள் சமவெட்டிகளின் நீளங்களைக் குறிப்பிடுமாயின்

(1) $\frac{1}{p}\cos\frac{A}{2}+\frac{1}{q}\cos\frac{B}{2}+\frac{1}{r}\cos\frac{C}{2}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

(2) $\frac{pqr}{4\Delta}=\frac{abc\,(a+b+c)}{(b+c)\,(c+a)\,(a+b)}$ என்று நிறுவுக.

16. $\angle$ **A**-யின் உள் சமவெட்டியின் நீளம் l என்றிருப்பின் $l^2(\sin B+\sin C) = 2bc\,(1+\cos A)\sin B\sin C$ என்று நிறுவுக.

17. **ABC** முக்கோணத்தின் செங்கோட்டு மையம் O ஆயின் $a.\,OB.\,OC + b.\,OC.\,OA + c.\,OA.\,OB = abc$ என்று நிறுவுக.

18. p_1, p_2, p_3 என்பவை **A, B, C**-யிலிருந்து எதிர் பக்கங்களுக்கு வரையும் செங்கோடுகளின் நீளங்களை குறிப்பிடுமாயின் கீழ்க்கண்டவற்றை நிறுவுக.

(1) $\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}+\dfrac{1}{p_3}=\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}+\dfrac{1}{r_3}=\dfrac{1}{r}=\dfrac{s^2}{r_1r_2r_3}$

(2) $\dfrac{1}{p_2}+\dfrac{1}{p^3}-\dfrac{1}{p_1}=\dfrac{1}{r_1}$

(3) $\dfrac{1}{p_3}+\dfrac{1}{p_1}-\dfrac{1}{p_2}=\dfrac{1}{r_2}$

(4) $\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}-\dfrac{1}{p_3}=\dfrac{1}{r_3}$

19. ABC முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்ட மையம் **S** ஆகும். BSC, CSA, ASB முக்கோணங்களின் சுற்றுவட்ட ஆரைகள் முறையே R_1, R_2, R_3 என்றிருப்பின்

$\dfrac{a}{R_1}+\dfrac{b}{R_2}+\dfrac{c}{R_3}=\dfrac{abc}{R^3}$ என்று நிறுவுக.

20. h_a, h_b, h_c என்பவை முறையே a, b, c பக்கங்களுக்கு வரையும் செங்கோடுகளைக் குறிப்பிடுமாயின் பின் வருவனவற்றை நிறுவுக.

(1) $\Sigma\ \dfrac{h_a{}^2(r_2+r_3)}{r_2r_3(h_a+2r_1)}=2.$

(2) $\Sigma\ \dfrac{r_2\,r_3}{(r_2+r_3)\,(h_a+2r_1)}=\frac{1}{2}.$

(3) $\Sigma\ \dfrac{a^2\,(b^2-c^2)}{r_1(r_2{}^2-r_3{}^2)}=4R.$

அதிகாரம் 9

மடக்கைகள் (logarithms)

95. a எண்ணை x படிக்கு உயர்த்தின் **N** எண் கிடைக்கிறது என்று கொள்வோம். அதாவது $a^x = N$. அப்பொழுது இந்த x எண், N எண்ணுக்கு, a மடக்கையடிக்கு (**base**) மடக்கையாகும் (**logarithm**). இதனை $\log_a N = x$ என்று எழுதுவது மரபு.

பயிற்சிகள்

$3^4 = 81$	ஆகையால்	$\log_3 81 = 4$
$10^1 = 10$	,,	$\log_{10} 10 = 1$
$10^2 = 100$	,,	$\log_{10} 100 = 2$
$10^3 = 1000$	,,	$\log_{10} 1000 = 3$
$2^3 = 8$	,,	$\log_2 8 = 3$
$10^0 = 1$	,,	$\log_{10} 1 = 0$
$10^{-1} = \cdot 1$	,,	$\log_{10} \cdot 1 = -1$
$10^{-2} = \cdot 01$	,,	$\log_{10} \cdot 01 = -2$

96. மடக்கையை வரையறுத்ததிலிருந்து a ஒரு மிகை முழு எண்ணாயிருப்பின் பின்வரும் உண்மைகளை எளிதில் நிறுவலாம்.

(a) மடக்கையடி எதுவாயினும் ஒன்றின் மடக்கை சுன்னமாகும்.

$\log_a 1 = 0$ ஏனெனின் $a^0 = 1$.

(b) a எண்ணுக்கு a மடக்கையடிவழியாக வரும் மடக்கை ஒன்றாகும்.

$\log_a a = 1$ ஏனெனின் $a^1 = a$.

(c) முடிவற்ற எண்ணுக்கு (∞) எந்த மடக்கை யடிவழியாகவும் பெறப்படும் மடக்கையும் ஒரு முடிவற்ற எண்ணாகும்.

$\log_a \infty = \infty$ ஏனெனின் $a^\infty = \infty$.

(d) சுன்னத்திற்கு எந்த மடக்கையடிவழியாகவும் பெறப்படும் மடக்கை முடிவற்ற குறை யெண்ணாகும். ($-\infty$).

$\log_a 0 = -\infty$. ஏனெனின் $a^{-\infty} = \frac{1}{a^\infty} = 0$.

(e) $b^{\log_b a} = a$.

97. இயற்கணிதத்திலிருந்து m, n என்பவை மெய்யெண்களாக **(real number)** இருப்பின் பின் வரும் வாய்பாடுகள் உண்மையென அறிகிறோம் :—

(1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$
(2) $a^m \div a^n = a^{m-n}$
(3) $(a^m)^n = a^{mn}$

இவைகளுக்கு நேர்நிலையாக மடக்கையில் பின்வருவன அடிப்படையான வாய்பாடுகளாகும்.

(1) $\log_a (mn) = \log_a m + \log_a n$

(2) $\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$

(3) $\log_a m^n = n \log_a m$

இவற்றை ஒவ்வொன்ருக நிறுவுவோம்.

98. இரண்டு எண்களின் பெருக்கெண்ணின் மடக்கை அவ்விரண்டு எண்களின் தனித்தனி மடக்கைகளின் கூட்டெண்ணுகும்.

தெரிப்பு.

$\log_a m = x$ ஆகவும், $\log_a n = y$ ஆகவும் கொள்வோம்.

அவ்விதமானல் $m = a^x$; $n = a^y$

$$\therefore \quad mn = a^x \times a^y = a^{x+y}$$

$$\therefore \quad \log_a(mn) = x+y$$

$$= \log_a m + \log_a n.$$

இவ்வழியாகவே $\log_a (mnp \ldots.) = \log_a m + \log_a n + \log_a p + \ldots \; ..$ என நிறுவலாம்.

ஆகையால் குறிப்பிட்ட பல எண்களின் பெருக்குத்தொகையின் மடக்கை, அவ்வெண்களின் தனிப்பட்ட மடக்கைகளின் கூட்டெண்ணுகும். இத்தெரிப்பு, எண்களின் பெருக்கல் தொகையைக் காணுதற்கு மிகவும் பயன்படும் ; பெருக்கல் வேலையை எளிதாக்கும்.

99. இரண்டு எண்களின் ஈவுடைய மடக்கை, மேலெண்ணின் மடக்கையினின்றும் கீழெண்ணின் மடக்கையைக் கழித்த எண்ணுகும்.

அஃதாவது $\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n.$

தேரிப்பு.

$\log_a m = x$, $\log_a n = y$ எனவும் கொள்வோம்.

$\therefore \quad m = a^x;\ n = a^y.$

ஆகையால் $\dfrac{m}{n} = \dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}.$

$$\therefore \quad \log_a\left(\frac{m}{n}\right) = x - y.$$

$$= \log_a m - \log_a n.$$

100. **ஓர் எண் எப்படிக்கு (index) உயர்த்தப்படினும், அத் தொகையின் மடக்கை, அவ்வெண்ணின் மடக்கையை உயர்த்தப்பட்ட படியால் (index) பெருக்கி வரும் தொகையாகும்.**

அஃதாவது $\log_a(m^n) = n \log_a m.$

$\log_a m = x$ எனக் கொள்வோம்.

ஆகையால் $m = a^x.$

$$\therefore \quad m^n = (a^x)^n = a^{xn}.$$

$$\therefore \quad \log_a(m^n) = nx.$$

$$= n \log_a m.$$

இவ்விதமே $\log_a \sqrt[n]{m} = \dfrac{1}{n} \log_a m.$

101. பெரும்பாலும் வழக்கத்திலிருக்கும் மடக்கையமைப்பு 10 என்ற மடக்கையடி கொண்டதாகும். அவ்வமைப்பே கிளார்க் (clark) வாய்பாடுகளிலும், மற்றைய வாய்பாடுகளிலும் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. ஆகையால் மடக்கை என்று கூறும்போது 10 என்ற மடக்கையடியைக் குறிப்பிடாது விடுத்தல் மரபாகும். வேறொரு மடக்கையடியும் குறிப்பிடா விடத்து 10 என்ற எண்ணே மடக்கையடி எனக் கொள்க. 10 என்ற மடக்கையடி கொண்ட மடக்கை அமைப்புகளுக்குப் **பொது மடக்கை (common logarithm)** என்று பெயர்

102. ஓர் எண்ணின் மடக்கை, ஒரு முழு எண்ணும் ஒரு பதின் பகுப்பும் (decimal) கூட்டிய தொகையாய் அமையும்போது அம்முழு எண் **மடக்கை முழு எண் (characteristic)** எனவும், பதின்பகுப்பு **மடக்கைப் பின்னம் (mantissa)** எனவும் பெயர் பெறும்.

103. பின்வரும் பகுதியில் மடக்கையடி 10 என்று கொள்ளப் பட்டிருக்கிறது. இப்பிரிவில் முதற்கண் கூறப்பட்டதைத் திரும்பவும் கூறலாம்.

$10^0 = 1$	$\therefore$	$\log 1$	$= 0$
$10^1 = 10$		$\log 10$	$= 1$
$10^2 = 100$		$\log 100$	$= 2$
$10^3 = 1000$		$\log 1000$	$= 3$
$10^{-1} = \cdot 1$		$\log \cdot 1$	$= -1$
$10^{-2} = \cdot 01$		$\log \cdot 01$	$= -2$
$10^{-3} = \cdot 001$		$\log \cdot 001$	$= -3$

104. ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட எண்களின் மடக்கையை ஆராய்வோம்.

7 எண், 1-க்கு மேற்பட்டது 10-க்கு உட்பட்டது. இதன் மடக்கை **0**-க்கு மேற்பட்டு, 1-க்கு உட்பட்டிருக்குமென்பது பின்வரும் வழியாகப் புலப்படும் :

$$1 < 7 < 10$$

$$\therefore \log 1 < \log 7 < \log 10$$

அஃதாவது $0 < \log 7 < 1$

ஆகையால் **log** 7 ஒரு பதின்பகுப்பாக மட்டுமே இருக்கும்.

அவ்விதமே இரண்டு இலக்கம் **(digits)** கொண்ட எண் ஒன்றை எடுத்துக்கொள்வோம் :

$$10 < 49 < 100$$

$$\therefore \log 10 < \log 49 < \log 100.$$

$$1 < \log 49 < 2.$$

ஆகையால் **log** 49 ஒன்றுக்கு மேற்பட்டு, இரண்டுக்கு உட்பட்டிருக்கிறது. ஆகையால் அது 1 + ஒரு பதின்பகுப்பாக இருக்கும். அவ்விதமே மூன்று இலக்கம் கொண்ட எண் ஒன்றை எடுத்துக்கொள்வோம் :

$$100 < 869 < 1000.$$

$$\therefore \log 100 < \log 869 < \log 1000.$$

$$\therefore 2 < \log 869 < 3.$$

அஃதாவது 869ன் மடக்கை **2**-க்கு மேற்பட்டதாய் **3**-க்கு உட்பட்டதாயிருக்கும். **2 +** ஒரு பதின்பகுப்பு எனக்கொள்ளலாம்.

இவ்வாறு நான்கு இலக்கமுள்ள ஒரு எண்ணின் மடக்கை = 3 + ஒரு பதின்பகுப்பு.

ஆகவே 1-க்கு மேற்பட்ட எண்கள், 10, 100, 1000, ...10-ன் மிகைப்படியாக அமையாத எண்கள் தவிர, ஏனைய எண்களின் மடக்கை ஒரு வெறும் பதின்பகுப்பாகவோ, ஒரு முழு எண்ணும் ஒரு பதின்பகுப்பு மாகவோ அமையும்.

ஒன்றுக்கு மேற்பட்டு, 10-க்கு உட்பட்ட எண்களுக்கு மடக்கை முழு எண் சுன்னம், மடக்கைப் பின்னம் ஒரு பதின்பகுப்பு; இரண்டு இக்கல முள்ள எண்ணுக்கு மடக்கை முழுஎண் 1, மடக்கைப்பின்னம் ஒரு பதின் பகுப்பு; மூன்று இலக்கமுள்ள எண்ணுக்கு மடக்கை முழு எண் 2, மடக்கைப் பின்னம் ஒரு பதின்பகுப்பு. இவ்வாறே **n இலக்கமுள்ள ஒரு எண்ணுக்கு மடக்கை முழு எண் $(n-1)$, மடக்கைப் பின்னம் ஒரு பதின் பகுப்பு என விளங்கும்.**

ஆகவே, ஓர் எண்ணின் மடக்கையை அறிய இரண்டு பகுதிகளை அறியவேண்டும். ஒன்று அம்மடக்கையின் முழு எண், மற்றொன்று அம் மடக்கையின் பதின்பகுதி. மடக்கை முழு எண், கொடுத்திருக்கும் எண் ணின் இலக்க எண்ணில் ஒன்று குறைவு. மடக்கைப் பின்னம் வாய்பாடு களில் காணலாம்.

105. ஒன்றுக்குக் குறைந்த எண்களின் மடக்கைகளை இப்போது ஆராய்வோம்.

ஒன்றுக்குக் குறைந்து 0·1-க்கு மேற்பட்ட ஒரு எண்ணை எடுத்துக் கொள்வோம். எடுத்துக்காட்டாக 0·7-ஐ எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$0{\cdot}1 < 0{\cdot}7 < 1$$
$$\therefore \quad \log 0{\cdot}1 < \log 0{\cdot}7 < \log 1.$$
$$-1 < \log 0{\cdot}7 < 0.$$

ஆகையால் 0·1-க்கு மேற்பட்ட ஒரு எண்ணுக்குரிய மடக்கை 0-க்கும் −1-க்கும் இடையில் உள்ளது. ஆகையால் அதனை −1 + மிகை பதின் பகுப்பு எனக்கொள்வது முறையாகும். ஆகவே ·7-ன் மடக்கையினது மடக்கை முழு எண் −1, மடக்கைப்பின்னம் ஒரு மிகை பதின் பகுதி.

மேலும் 0·01-க்கு மேற்பட்டதாய், 0·1-க்குக் குறைபட்டதாய் உள்ள ஓர் எண்ணின் மடக்கையைக் காண்போம்.

$$0{\cdot}01 < 0{\cdot}079 < 0{\cdot}1$$

$$\therefore \quad \log 0{\cdot}01 < \log 0{\cdot}079 < \log 0{\cdot}1$$

$$(\text{அ-து}) \quad -2 < \log 0{\cdot}079 < -1.$$

ஆகவே 0·079 மடக்கை −1-க்கும், −2-க்கும் இடைப்பட்டது. எனவே அதனை −2 + ஒரு மிகைபதின்பகுதியெனக் கொள்வது முறையாகும். இவ்வாறே 0·001-க்கு மேற்பட்டதாய் 0·01-க்குக் குறைபட்டதாயுள்ள ஓர் எண்ணின் மடக்கை −3 + மிகை பதின்பகுதி.

ஆகவே இவற்றை யெல்லாம் பாகுபடுத்திப் பொதுவாக நோக்குமிடத்துப் பின்வரும் உண்மை புலப்படும்.

ஓர் எண், 0-க்கு மேற்பட்டு, 1-க்குக் குறைபட்டிருப்பின் அதன் மடக்கை

(1) ஒரு குறையெண்ணாகும்.

(2) அக்குறையெண்ணை இரு பிரிவாக அமைக்கலாம்.

(3) ஒரு பிரிவு குறை முழு எண்.

(4) மற்றொரு பிரிவு மிகை பதின் பகுதி.

(5) பதின் பகுதிப் புள்ளிக்கு அடுத்த எண் சுன்னமல்லாத எண்ணாயின், மடக்கை முழு எண் −1, ஒரு சுன்னமிருப்பின் மடக்கை முழு எண் −2, இரு சுன்னமிருப்பின் மடக்கை முழு எண் −3 ; எனவே **ஒரு பதின் பகுப்பு எண்ணில், புள்ளிக்கு அடுத்தாற்போல் n சுன்னங்களிருப்பின் அதன் மடக்கை முழு எண் − $(n+1)$ ஆகவும், மடக்கைப் பின்னம் ஒரு மிகை பதின் பகுதியாகவும் அமையும்.**

106. 104, 105 தொகுதிகளில் நிறுவினவற்றையொட்டிப் பின்வரும் உண்மைகள் புலப்படும்.

(1) ஓர் எண்ணின் மடக்கையில் $+n$ மடக்கை முழு எண்ணாகவிருப்பின், அவ்வெண் ஒன்றுக்கு மேற்பட்டது. அவ்வெண் $(n+1)$ இலக்கங்கள் கொண்டது.

(2) ஓர் எண்ணின் மடக்கையில் $-n$ மடக்கை முழு எண்ணாகவிருப்பின், அவ்வெண் 0-க்கும் 1-க்கும் இடைப்பட்ட ஓர் எண் ; அவ்வெண்ணின் பதின்பகுதிப் புள்ளிக்குப் பின்பு $(n-1)$ சுன்னங்கள் இருத்தல்வேண்டும்.

107. இரண்டு எண்கள், தாங்கள் பெற்றிருக்கும் பதின்பகுதிப் புள்ளி நிலையில் மட்டும் வேறுபட்டு மற்ற வகையில் ஒன்றாக இருப்பின் அவ்விரண்டு எண்களும் ஒரே மடக்கைப்பின்னமுடையதாகும். இதனை ஓர் எடுத்துக்காட்டினால் விளக்குவோம்.

$\log 4686 = 3\cdot6708$ என்று கொடுத்திருப்பதாகக் கொள்வோம்.

அப்பொழுது $\log 46\cdot86 = \log \frac{4686}{100}$

$$= \log 4686 - \log 100$$
$$= 3\cdot6708 - 2$$
$$= 1\cdot6708$$

$$\log \cdot4686 = \log \frac{4686}{10000} = \log 4686 - \log 10000$$
$$= 3\cdot6708 - 4$$
$$= -1 + \cdot6708$$

$$\log \cdot004686 = \log \frac{4686}{1000000} = \log 4686 - \log 1000000$$
$$= 3\cdot6708 - 6$$
$$= -3 + \cdot6708.$$

4686, 46·86, ·4686, ·004686 எண்கள் பதின்பகுதிப் புள்ளி நிலையில் மட்டும் வேறுபட்டு, மற்ற வகையில் ஒன்றாக இருக்கின்றன. அவ்வெண்களின் மடக்கைப்பின்னங்கள் ஒரே எண்ணாக இருப்பதைக் காணுகிறோம். மடக்கை முழு எண்கள் வெவ்வேறாயுள்ளன.

108. மடக்கை வாய்பாடு (Tables of logarithms).

ஒரு எண்ணின் மடக்கையில், மடக்கை முழு எண்ணை அவ்வெண்ணைக்கொண்டே நிறுவலாமாதலால், வாய்பாடுகளில், மடக்கை முழு எண்ணை விடுத்து மடக்கை பதின் பகுதியாகிய மடக்கைப் பின்னமே கொடுக்கப்பட்டிருக்கும். இதனை வாய்பாடுகளில் காண்க.

மடக்கை வாய்பாட்டின் இடப் பக்க ஓரத்தில் எண்ணின் முதலிரண்டு இலக்கங்கள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. அடுத்த பத்து நிரல்களின் உச்சியில் மூன்றாவது இலக்கம் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. கடைசியாக வலப்புறத்திலுள்ள 'மிச்சம்' (**difference**) என்ற 9 நிரல்களின் உச்சியில் நான்காவது இலக்கம் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

மாதிரி வாய்பாடு.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31

109. நான்கிலக்க மடக்கை வாய்பாடுகளைப் பயன்படுத்தும் முறை.

(a) மடக்கை முழு எண் அறியும் முறை :—

ஓர் எண்ணின் மடக்கை அறியவேண்டின் முதலில் அவ்வெண்ணைக்கொண்டே மடக்கை முழு எண்ணை எழுதிவிடலாம். 1-க்கு மேற்பட்ட எண்ணுயிருந்து n இலக்கங்கள் பெற்றிருப்பின் மடக்கை முழு எண் $(n-1)$; 1-க்குக் குறைபட்ட எண்ணுயிருந்து, பதின் பகுதிப் புள்ளிக்குப் பின் n சுன்னங்கள் பெற்றிருப்பின் மடக்கை முழு எண் $-(n+1)$.

(b) மடக்கைப் பினனம் அறியும் முறை.

கொடுக்கப்பட்ட எண் இரண்டிலக்கங்கொண்டதாயின், வாய்பாட்டின் நிரல் வழியே வேண்டிய எண்ணிடம் வந்து, அதன் பக்கலில் 0 நிரலில் நேராக இருக்கும் பதின்பகுதியைக் கொள்க.

கொடுக்கப்பட்ட எண் மூன்றிலக்கமுடையதாயின் முதல் இரண்டு இலக்கங்களைக்கொண்டு அதன் இடத்தை வாய்பாடு நிரலில் அறிக. அந்த வரிசையிலேயே மூன்ருவது இலக்கம் உள்ள நிரலுக்கு நேராக உள்ள மடக்கைப் பின்னத்தைக்கொள்க.

நான்கிலக்க எண்ணுயிருப்பின், முதல் இரண்டிலக்கங்களைக்கொண்டு அதன் இடத்தை வாய்பாடு நிரலில் குறிக்க. அவ்வரிசையிலேயே மூன்ருவது இலக்கமுள்ள நிரலுக்குச் சென்று அப்பின்னத்தைக்கொள்க. அவ்வரிசையிலேயே மிச்ச நிரலுக்குச் சென்று நான்காவது இலக்க நிரலை நோக்கி அங்குள்ள எண்ணை முன் கண்ட பின்னத்தோடு கூட்டுக. இக்கூட்டுத் தொகையே அந்நான்கிலக்க எண்ணின் மடக்கைப்பின்னம்.

எடுத்துக்காட்டு :—

	மடக்கை முழு எண்	மடக்கைப்பின்னம்	
(1) **log** 7	0	70-க்குப் பக்கலில் 0 நிரலில் உள்ள	·8451

$\therefore$ **log** 7 = ·8451.

(2) **log** 64	1	64-க்குப் பக்கலில் 0 நிரலில் உள்ள	·8062

$\therefore$ **log** 64 = 1·8062.

(3) **log** 762	2	76 வரிசையில் 2 எண் நிரலில் உள்ள	·8820

$\therefore$ **log** 762 = 2·8820

(4) **log** 4896	3	48 வரிசையில் 9 நிரலில் உள்ள எண்	·6893
		அதே வரிசையில் 'மிச்ச'த்தில் 6 நிரலில் காண்பது	·0005
		கூட்டெண்	·6898

$\therefore$ **log** 4896 = 3·6898

(5) **log** 56·73	1	56 வரிசையில் 7 எண் நிரலில் உள்ள எண்	·7536
		அதே வரிசையில் 'மிச்சம்' நிரலில் 3எண் நிரலில்	·0002
		கூட்டெண்	·7538

(6) **log** (·006543)	− 3	65 வரிசையில் 4 எண் நிரலில் உள்ளது	·8156
		அதே வரிசையில்மிச்சம் நிரலில் 3 எண் நிரலில் காண்பது	·0002
		கூட்டெண்	·8158

$\therefore$ **log** ·006543 = − 3 + ·8158.

இதனை $\bar{3}$·8158 என்றும் எழுதுவதுண்டு. இதன் பொருள் − 3 + ·8158. இதனை − (3·8158) என்று கொள்ளல் தவறாகும்.

110. இன மடக்கை வாய்பாடு (Anti-logarithm). இதன் வழியாக ஓர் எண்ணின் மடக்கை கொடுக்கப்பட்டிருப்பின், அவ்வெண்ணை அறிய இயலும். இன மடக்கை வாய்பாட்டின் இடப்பக்க ஓரத்தில் மடக்கைப் பின்னத்தின் முதலிரண்டு இலக்கங்கள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. அடுத்த பத்து நிரல்களின் உச்சியில் மடக்கைப் பின்னத்தின் மூன்றுவது இலக்கம் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. கடைசியாக வலப்புறத்திலுள்ள 'மிச்சம்' (**difference**) என்ற 9 நிரல்களின் உச்சியில் மடக்கைப் பின்னத்தின் நான்காவது இலக்கம் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

111. நான்கிலக்க இனமடக்கை வாய்பாட்டினைப் பயன்படுத்தும் முறை. எடுத்துக்காட்டாக 1·2379-ஐ மடக்கையாகக் கொண்ட எண் யாதென அறியப் புகுவோம். மடக்கை முழு எண் 1 ஆக இருப்பதால், இம்மடக்கை கொண்ட எண் இரண்டு இலக்கங்களைக் கொண்டதாகும்.

·23 என்ற வரிசையில் 7 என்ற நிரலில் காணப்படும் எண்	1726
அதே வரிசையில் 'மிச்சம்' என்ற நிரலில் 9 என்ற எண்ணுக்கு உரிய எண்	4
கூட்டெண்	1730

1·2379 என்ற மடக்கையைக்கொண்ட எண் 17·3.

இவ்வாறே $\bar{2}$·5645 என்ற மடக்கையைக் கொண்ட எண்ணைக் காணுதல் எளிது.

−2 மடக்கை முழு எண்ணுதலில் அம்மடக்கை முழு எண் கொண்ட எண் 1-க்குக் குறைந்ததாய் பதின்பகுதிப்புள்ளிக்குப் பக்கலில் ஒரு சுன்னம் பெற்றிருக்கும். முன் கண்டபடி ·5645 என்ற மடக்கைப் பின்னம்கொண்ட எண் 3668. ஆகவே $\bar{2}$·5645 என்ற மடக்கையைக் கொண்ட எண் ·03668.

ஆகையால் மடக்கை தெரிந்து அதற்குரிய எண்ணைக் கண்டு பிடிப்பதாயின், முதலில் மடக்கை முழு எண்ணைக்கொண்டு, அவ்வெண் 1-க்கு மேற்பட்டதா, குறைபட்டதா என்பதை அறியலாம். அவ்வெண் ஒன்றுக்கு மேற்பட்டதாயின், அதற்கு எத்தனை இலக்கங்கள் உண்டென்றும் அல்லது ஒன்றுக்குக் குறைபட்டதாயின் பதின் பகுதி புள்ளிக்குப்பின் எத்தனைச் சுன்னங்கள் உண்டென்றும் அறியலாம். பின்மடக்கைப் பின்னத்திற்குரிய எண்ணை இனமடக்கை வாய்பாட்டைக்கொண்டு முன் கூறியபடி யறிந்து, இலக்கங்களையோ சுன்னங்களையோ நிலைக்கச் செய்யலாம்.

பயிற்சி 1. மடக்கை, இனமடக்கை வாய்பாடுகளைப் பயன்படுத்தி

$$\frac{8\cdot073\times2\cdot497}{17\cdot52}$$ -ஐ சுருக்குக.

இதன் மதிப்பு x எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad x = \frac{8\cdot073\times2\cdot497}{17\cdot62}.$$

$$\therefore \quad \log x = \log 8\cdot073 + \log 2\cdot497 - \log 17\cdot62$$
$$= \cdot9071 + \cdot3974 - 1\cdot2430$$
$$= 1\cdot3045 - 1\cdot2430$$
$$= \cdot0615$$
$$\therefore \quad x = 1\cdot152.$$

பயிற்சி 2. $$\frac{(34\cdot73)^{\frac{3}{5}}\times\sqrt[6]{2\cdot538}}{\sqrt[5]{4\cdot396}}$$ -ஐ சுருக்குக.

இதன் மதிப்பு x என்று கொள்வோம்.

$$x = \frac{(34\cdot73)^{\frac{3}{5}}\times\sqrt[6]{2\cdot538}}{\sqrt[5]{4\cdot396}}.$$

$$\therefore \quad \log x = \log (34\cdot73)^{\frac{3}{5}} + \log (2\cdot538)^{\frac{1}{6}} - \log (4\cdot396)^{\frac{1}{5}}$$
$$= \tfrac{3}{5} \log 34\cdot73 + \tfrac{1}{6} \log 2\cdot538 - \tfrac{1}{5} \log 4\cdot396$$
$$= \tfrac{3}{5}\times1\cdot5407 + \tfrac{1}{6}\times\cdot4045 - \tfrac{1}{5}\times\cdot6431$$
$$= \cdot92442 + \cdot06742 - \cdot12862$$
$$= \cdot99184 - \cdot12862$$
$$= \cdot8732$$
$$\therefore \quad x = 7\cdot467.$$

பயிற்சிகள் 23

1. பின்வரும் எண்களின் மடக்கை முழு எண்களைக் காண்க.
   5280, 70·07, 6·528, ·00343, ·9356, $9\cdot6\times10^7$, $4\cdot9\div10^5$.
2. முன் பயிற்சியிலுள்ள எண்களின் மடக்கைகளை எழுதுக.
3. பின்வரும் எண்களை மடக்கையாகக்கொண்ட எண்கள் யாவை?

   ·3010, ·8451, 1·9750, 2·9739, $\bar{1}\cdot5615$, $\bar{2}\cdot8199$.

4. மடக்கை, இன மடக்கை வாய்பாடுகளால் பின்வருவனவற்றைச் சுருக்குக.

(a) $\frac{34 \cdot 56 \times \cdot 233}{55 \cdot 81}$

(b) $\sqrt[3]{\cdot 0845}$

(c) $\frac{1 \cdot 712 \times 412 \cdot 4 \times 32 \cdot 7}{\cdot 01377 \times 5287}$

(d) $\frac{1}{240} \times (1 \cdot 035)^{50}$

(e) $(1080)^{\frac{1}{2}} \times (\cdot 24)^{\frac{5}{3}} \times 8 \cdot 1$

(f) $\frac{\sqrt[3]{378} \times \sqrt[3]{1 \cdot 08}}{\sqrt[6]{1008} \times \sqrt[3]{486}}$

5. x-ன் மதிப்பைப் பின்வரும் சமன்பாடுகளினின்றும் அறிக (இரண்டு பதின்பகுதி வரையில்)

(a) $2^{x-1} = 5$

(b) $8^{5-3x} = 12^{4-2x}$

(c) $10^{2x-5} = \cdot 01$

(d) $2^{2x} = 3^{x+1}$

(e) $2^{x}. 3^{x+4} = 7^{x}$

6. பின்வருவனவற்றில் முழு எண் பகுதி எத்தனை இலக்கங்களுடையது என்பதைக் காண்க :—

(1) 3^{64}

(2) 2^{36}

(3) 3^{100}

(4) $(2 \cdot 05)^{50}$.

112. கோண கணிதத் தகவுகளின் வாய்பாடுகள் (Tables of Trigonometrical ratios) $0°$ முதல் $90°$ வரையுள்ள கோணங்களின் கோண கணிதத் தகவுகள் தரக்கூடிய வாய்பாடுகள் உண்டுபண்ணப்பட்டிருக்கின்றன. அவைகளை இயற்கை நெடுக்கைகள் (**natural sines**), இயற்கைக் கிடக்கைகள் (**natural cosines**), இயற்கை இருக்கைகள் (**natural tangents**) என்று கூறப்படும். கோண கணிதத் தகவு வாய்பாடுகளில் ஓரத்தில் இடது பக்கத்தில் பாகையும், அடுத்த பத்து நிரல்களின் உச்சியில் 0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54 கலைகளும், அதற்கு அப்புறம் 5 நிரல்களின் உச்சியில் 1, 2, 3, 4, 5 கலைகளும் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன.

மாதிரி வாய்பாடு

இயற்கை நெடுக்கைகள்

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	1′	2′	3′	4′	5′
11	1908	1925	1942	1959	1977	1994	2011	2028	2045	2062	3	6	9	11	14
12	2079	2096	2113	2130	2147	2164	2181	2198	2215	2232	3	6	9	11	14
13	2250	2267	2284	300	2317	2334	2351	2368	2385	2402	3	6	8	11	14
14	2419	2436	2453	2470	2487	2504	2521	2538	2554	2571	3	6	8	11	14
15	2588	2605	2622	2639	2656	2672	2689	2706	2723	2740	3	6	8	11	14

113. வாய்பாடுகளைப் பயன்படுத்தும் முறை. நெடுக்கை வாய்பாடும், இருக்கை வாய்பாடும் மட்டுமே கிளார்க்கு வாய்ப்பாடுகளில் (**clark's tables**) உள. எனெனின் ஒரு கோணத்தின் கிடக்கை காணவேண்டுமானல் அந்தக் கோணத்தின் நிரப்பின் (**complementary angle**) நெடுக்கை கண்டாற் போதும்

$$\cos 35^\circ = \sin (90^\circ - 35^\circ) = \sin 55^\circ$$

$$\cos (14^\circ 25') = \sin (90^\circ - 14^\circ 25') = \sin (75^\circ 35')$$

கோணம் பாகைகளும் கலைகளும் மட்டுமே அடங்கியதாய் இருந்தால் அதன் கோண கணிதத் தகவுகள் வாய்பாடுகளிலிருந்து காண்பது எளிதாகும்; எடுத்துக் காட்டாக **sin** $(76^\circ 11')$-ஐ அறியவேண்டுமென்வைத்துக் கொள்வோம். 76°-ன் இடத்தை நெடுக்கை வாய்பாடு நிரலில் குறிக்க. அந்த வரிசையிலேயே 6′ உள்ள நிரலுக்குச் சென்று அப்பின்னத்தை கொள்க. அதே வரிசையில் பிற்பாடுள்ள நிரலில் 5′ உள்ள நிரலை நோக்கி அங்குள்ள எண்ணை முன் கண்ட பின்னத்தோடு கூட்டுக. ஆகவே

$$\sin (76^\circ 11') = \cdot 9707 + \cdot 0003 = \cdot 9710.$$

இவ்வாறே $\cos (63^\circ 38') = \sin (26^\circ,\ 22') = \cdot 4431 + \cdot 0010$

$$= \cdot 4441$$

$$\tan (48^\circ 52') = 1 \cdot 1423 + \cdot 0026$$

$$= 1 \cdot 1449,$$

114. கோணம் விகலேயும் அடங்கியதாயிருந்தால் அதன் தகவுகளைக் காணும் முறையைப் பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகளினால் விளக்குவோம்.

எடுத்துக்காட்டு 1. **sin** $(36^\circ\ 40'\ 36'')$-ஐ காணவேண்டுமெனக் கொள்வோம்.

$\sin (36^\circ\ 41') = \cdot 5974$

$\sin (36^\circ\ 40') = \cdot 5971$ என்று வாய்பாட்டிலிருந்து காணலாம்.

$1'$ன் நெடுக்கையில் ஏற்படும் வேற்றுமை $= .0003$

$36''$,, ,, $= \dfrac{\cdot 0003}{60} \times 36$

$= \cdot 00018.$

ஆகவே $\sin (36^\circ\ 40'\ 36') = \cdot 59728.$

எடுத்துக்காட்டு 2. **cos** $(72^\circ\ 43'\ 29'')$-ஐ காணவேண்டுமெனக் கொள்வோம்.

$\cos (72^\circ\ 43'\ 29'') = \sin (17^\circ\ 16'\ 31'').$

$\sin (17^\circ\ 17') = \cdot 2971$

$\sin (17^\circ\ 16') = \cdot 2968$

$\therefore$ $1'$-ன் நெடுக்கையில் ஏற்படும் வேற்றுமை $= \cdot 0003$

$31''$,, ,, $= \dfrac{\cdot 0003 \times 31}{60}$

$= \cdot 00016$

$\therefore \cos (72^\circ\ 43'\ 29'') = \sin (17^\circ\ 16'\ 31') = \cdot 29696$

எடுத்துக்காட்டு 3. **tan** $(61^\circ\ 26'\ 18'')$-ஐ காணவேண்டுமெனக் கொள்வோம்.

$\tan (61^\circ\ 27') = 1 \cdot 8379$

$\tan (61^\circ\ 26') = 1 \cdot 8367$

$1'$-ன் இருக்கையில் ஏற்படும் வேற்றுமை $= \cdot 0012$

$18''$,, ,, $= \dfrac{\cdot 0012}{60} \times 18$

$= \cdot 00036$

$\therefore \tan (61^\circ\ 29'\ 18'') = 1 \cdot 83706.$

115. தகவுகளின் மதிப்பிலிருந்து கோணத்தைக் காணும் முறை. எடுத்துக்காட்டுகளினால் நாம் இம்முறையை விளக்குவோம்.

எடுத்துக்காட்டு 1. ·3442-ஐ நெடுக்கையாகக்கொண்ட கோணத்தை காணவேண்டுமெனக்கொள்வோம். வாய்பாட்டிலிருந்து ·3437-ஐ நெடுக்கையாகக்கொண்ட கோணம் $20^\circ\ 6'$ என்று அறிகிறோம். அதே வரிசையில் பிற்பாடுள்ள 2-வது நிரலிலுள்ள எண் 5. ஆகையால் $\sin 20^\circ\ 11' = \cdot 3442$.

எடுத்துக்காட்டு 2. ·8316-ஐ கிடக்கையாகக்கொண்ட கோணத்தைக் காணவேண்டுமெனக்கொள்வோம். இதற்கு கிடக்கை வாய்பாடு இல்லாதலால் இயற்கை நெடுக்கை வாய்பாட்டிலிருந்து ·8316-ஐ நெடுக்கையாகக் கொண்ட கோணத்தைக் காணலாம். இந்தக் கோணத்தின் நிரப்பும் கோணம் ·8316-ஐ கிடக்கையாகக் கொண்டது. நெடுக்கை வாய்பாட்டிலிருந்து $\sin 56^\circ\ 16' = \cdot 8316$ என்று அறிகிறோம். ஆகையால் $\cos 33^\circ\ 44' = \cdot 8316$.

எடுத்துக்காட்டு 3. ·5987-ஐ நெடுக்கையாகக் கொண்ட கோணத்தைக் காணவேண்டுமெனக்கொள்வோம். வாய்பாட்டிலிருந்து கிடைப்பது

$$\cdot 5985 = \sin 36^\circ\ 46'$$

$$\cdot 5988 = \sin 36^\circ\ 47'$$

$\cdot 0003 = 1'$-ன் நெடுக்கையில் ஏற்படும் வேற்றுமை

$$\cdot 0002 = \frac{60}{3} \times 2'' \quad ,,$$

$$= 40'' \quad ,,$$

$$\therefore \quad \cdot 5987 = \sin 36^\circ\ 46'\ 40''$$

எடுத்துக்காட்டு 4. 1·5247-ஐ இருக்கையாகக் கொண்ட கோணத்தைக் காணவேண்டுமென வைத்துக்கொள்வோம்.

இயற்கை இருக்கைப்பட்டிகையிலிருந்து

$$1\cdot 5243 = \tan 56^\circ\ 44'$$

$$1\cdot 5253 = \tan 56^\circ\ 45'$$

$\therefore \quad \cdot 0010 = 1'$-ன் இருக்கையில் ஏற்படும் வேற்றுமை

$$\cdot 0004 = \frac{60 \times 4''}{10} \quad ,,$$

$$= 24''$$

$$\therefore \quad 1\cdot 5247 = \tan (56^\circ\ 44'\ 24'')$$

116. கோண கணிதத் தகவுகளின் மடக்கைப் பட்டிகை.

பலவிதமான கோண கணிதக் கணக்கீடுகளில் (**calculalions**) தகவுகளின் மடக்கைகள் காணவேண்டிவரும். ஒரு கோணத்தின் தகவை பட்டிகையிலிருந்து கண்டு, அதற்குப்பின் மடக்கைப் பட்டிகையால் அதன் மடக்கையைக் காணுவதற்குச் சிறிது நேரம் பிடிக்குமாதலால், ஒரே பட்டிகையால் கோணங்களுடைய தகவுகளின் மடக்கைகளைக் காண இயலும் பட்டிகைகள் இருத்தல் நலம்.

ஒரு கோணத்தின் நெடுக்கை எப்பொழுதும் ஒன்றைவிடக் குறைவாக இருப்பதால், நெடுக்கையின் மடக்கை எப்பொழுதும் குறைக்கணியமாகவே இருக்கும். மேலும் 0°க்கும் 45°க்கும் இடையிலுள்ள ஒரு கோணத்தின் இருக்கை ஒன்றைவிடக் குறைவாக இருக்கும். ஆகவே அதன் இருக்கையின் மடக்கை குறைகணியமாகவே இருக்கும். கோண கணிதத் தகவுகளின் மடக்கைகளுக்குரிய குறியை பட்டிகைகளில் அச்சிடுவதின் கஷ்டத்தையும், வசதி இன்மையும் ஒழிப்பதற்காக உண்மை மடக்கைகளோடு 10 ஐ கூட்டி நிரலிடப்பட்டிருக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டாக $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

ஆகவே $\log \sin 30^\circ = \log \frac{1}{2} = -\log 2 = -\cdot 3010 = \bar{1}\cdot 6990$

$\therefore$ நிரலிட்ட மடக்கை $= 10 + \log \sin 30^\circ = 9\cdot 6990$

மேலும் $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

ஆகவே $\log \tan 30^\circ = \log \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{2} \log 3.$

$$= -\frac{1}{2} (\cdot 4771) = -\cdot 2386 = \bar{1}\cdot 7614$$

ஆகவே நிரலிட்ட மடக்கை $= 10 + \bar{1}.7614 = 9\cdot 7614.$

இவ்விதமான மடக்கைகளை நிரலிட்ட மடக்கைகள் (**tabular logarithms**) எனக் கூறப்படும். இவைகளை **L** குறியால் குறிப்பிடுவது வழக்கம்.

ஆகவே $L \sin 30^\circ = \log \sin 30^\circ + 10.$

$L \tan 48^\circ 23' = \log \tan 48^\circ 23' + 10.$

ஆகவே ஒரு தகவின் உண்மை மடக்கைக் காண, அதன் நிரலிட்ட மடக்கையைக் கண்டு அதிலிருந்து 10-ஐ கழிக்கவும். நிரலிட்ட மடக்கை பட்டி

கையிலிருந்து ஒரு தகவின் மடக்கை காண்பதும், ஒரு குறித்தத் தொகையை தகவின் நிரலிட்ட மடக்கையாகக்கொண்ட கோணத்தைக் காண்பதும் 114, 115, 116-வது தொகுதிகளில் விளக்கினமாதிரியே ஆகும்.

பயிற்சிகள் 24.

பின் வருவனவற்றின் மதிப்புகளை காண்க.

1 $\sin 37^\circ 24' \times \cos 72^\circ 15'$.

2. $\sin 26^\circ 32' \times \cot 41^\circ 17'$.

3. $\tan 37^\circ 33' \times \operatorname{cosec} 22^\circ 18'$.

4. $\sec 53^\circ 22' \times \operatorname{cosec} 22^\circ 27'$.

5. $\cot 125^\circ 47' \times \cos 172^\circ 15'$.

6. $\sin 153^\circ 44' \times \tan 73^\circ 27'$.

7. $\tan 127^\circ 31' \times \cot 136^\circ 11'$.

8. $\operatorname{cosec} 143^\circ 22' \times \cot 157^\circ 3'$.

9. $\tan 57^\circ 32' \div \cot 47^\circ 3'$.

10. $\sec 22^\circ 13' \div \tan 51^\circ 41'$.

அதிகாரம் 10

முக்கோணங்களின் தீர்வுகள் (Solution of triangles)

117. முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களையும், மூன்று கோணங்களையும் முக்கோணத்தின் **உறுப்புக்கள்** (elements of the triangle) எனக் கூறப்படும். ஆகவே ஒரு முக்கோணத்திற்கு ஆறு உறுப்புக்கள் உண்டு. அவற்றில் எதாவது ஒரு பக்கமும், வேறு இரண்டு உறுப்புக்களும் கொடுத்திருப்பின் முக்கோணத்தை வரைய இயலுமென வடிவு கணித நூலில் படித்திருக்கிறோம். இம்மாதிரி கோணகணிதத்திலும் ஒரு பக்கமும், வேறு இரண்டு உறுப்புக்களும் கொடுத்திருப்பின் மற்ற மூன்று உறுப்புக்களைக் கணக்கிடலாம். மூன்று கோணங்கள் மட்டும் கொடுத்திருப்பின் பக்கங்களின் நீளங்களின் விகிதமட்டுமே அறியமுடியும். ஆகவே முக்கோணத்தின் உருவத்தை (shape)த் தவிரப் பருமனைக் காண இயலாது. முக்கோணத்தின் மூன்று உறுப்புக்களைக் கொடுத்து மற்ற மூன்று உறுப்புக்களைக் கணக்கிடும் முறையை, முக்கோணத்தை விடுவித்தல் அல்லது முக்கோணத்தின் தீர்வு காணுதல் (Solution of the triangle) என்று கூறப்படும்.

நாம் முதலாவதாகச் செங்கோண முக்கோணங்களின் தீர்வைப் பற்றி ஆராய்வோம்.

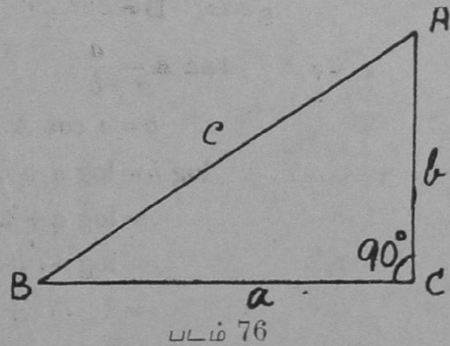
118. வகை ஒன்று.—செங்கோண எதிர் சிறையும், ஒரு பக்கமும் கொடுத்திருப்பின் முக்கோணத்தை விடுவித்தல்.

b கொடுத்திருக்கும் பக்கமாகவும், c கொடுத்திருக்கும் செங்கோண எதிர் சிறையாகவும் கொள்வோம்.

$\sin B = \frac{b}{c}$ தொடர்பிலிருந்து $\angle B$-ஐ காணலாம். இரண்டு பக்கமும் மடக்கை எடுப்பின்

$L \sin B - 10 = \log b - \log c$

bயும், cயும் கொடுத்திருப்பதால் $L \sin B$-ஐ கணக்கிட்டு B-யின் அளவை நிரலிட்ட மடக்கை பட்டிகையிலிருந்து அறியலாம்,



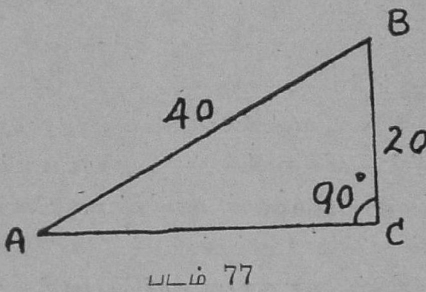
படம் 76

$A = 90^\circ - B$ ஆகவே A-யின் அளவை அறியலாம்.

a-ஐ கீழ்க்கொடுத்திருக்கும் வாய்பாடுகளில் ஒன்றால் கணக்கிடலாம்.

$$\cos B = \frac{a}{c}, \tan B = \frac{b}{a} \text{ அல்லது } a = \sqrt{(c+b)(c-b)}$$

பயிற்சி 1. $C = 90^\circ$, $a = 20$, $c = 40$ என்று கொடுத்திருப்பின் முக்கோணத்தை விடுவி.



படம் 77

$$\sin A = \tfrac{20}{40} = \tfrac{1}{2} \quad \therefore A = 30^\circ.$$

$$\therefore B = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ.$$

மேலும் $\tan B = \dfrac{b}{20}$.

(அ-து) $\tan 60^\circ = \dfrac{b}{20}$.

$$\therefore b = 20 \tan 60^\circ = 20\sqrt{3}.$$

பயிற்சி 2. $C = 90^\circ, c = 58{\cdot}4\ a = 47{\cdot}55$ என்றால் முக்கோணத்தை விடுவி.

$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{47{\cdot}55}{58{\cdot}40}$$

$$\therefore L \sin A - 10 = \log 47{\cdot}55 - \log 58{\cdot}40$$

(அ-து) $L \sin A = 10 + 1{\cdot}6772 - 1{\cdot}7664$

$$= 9{\cdot}9108$$

$$\therefore A = 54^\circ\ 31'$$

ஆகவே $B = 35^\circ\ 29'$

மேலும் $\tan A = \dfrac{a}{b}$

$$\therefore b = a \cot A.$$

ஆகவே $\log b = \log a + L \cot A - 10$

$$= \log a + L \tan (90^\circ - A) - 10$$

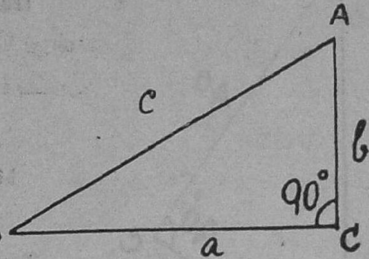
$$= \log 47{\cdot}55 + L \tan 35^\circ\ 29' - 10$$

$$= 1{\cdot}6772 + 9{\cdot}8530 - 10$$

$$= 1{\cdot}5302.$$

$$\therefore b = 33{\cdot}9.$$

119. வகை இரண்டு:—செங்கோண எதிர் சிறையில்லாமல் மற்ற இரண்டு பக்கங்கள் கொடுத்திருப்பின் முக்கோணத்தை விடுவித்தல்.



படம் 78

a யும் b யும் கொடுத்திருக்கின்றன.

$$\tan B = \frac{b}{a}$$

$\therefore$ $L \tan B - 10 = \log b - \log a$

b, a என்பவை கொடுத்திருப்பதால் L tan B-ஐ கணக்கிட முடியும். ஆகையால் B-யின் அளவை அறியலாம்.

$A = 90° - B$. ஆகவே **A**-ஐ அறியலாம்.

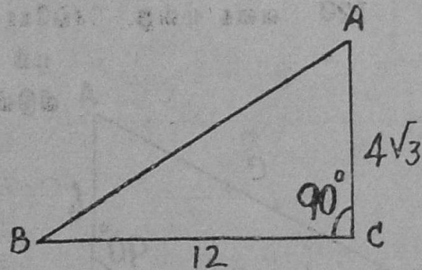
C-ஐ $\sin B = \frac{b}{c}$ தொடர்பால் கணக்கிடலாம்.

(அது) $c = \frac{b}{\sin B}$

$$\therefore \quad \log c = \log b - L \sin B + 10.$$

ஆகவே **c**-யின் மதிப்பை அறியலாம்.

பயிற்சி 3. $C = 90°$, $a = 12$, $b = 4\sqrt{3}$ என்று கொடுத்திருப்பின் முக்கோணத்தை விடுவி.



படம் 79

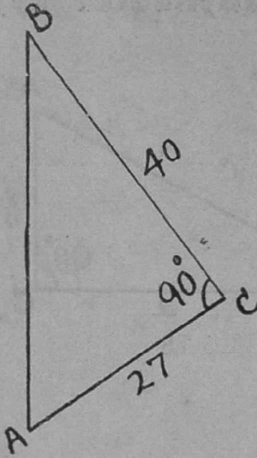
$$\tan B = \frac{4\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30°$$

$$\therefore \quad B = 30°$$

ஆகவே $A = 60°$

மேலும் $\sin B = \frac{4\sqrt{3}}{c}$

$$\therefore \quad c = \frac{4\sqrt{3}}{\sin B} = \frac{4\sqrt{3}}{\sin 30°} = 8\sqrt{3}.$$



படம் 80

பயிற்சி 4, $C = 90°,\ a = 40,\ b = 27$ என்று கொடுத்திருந்தால் முக்கோணத்தின் மற்ற உறுப்புக்களைக் கணக்கிடுக.

$$\tan A = \frac{40}{27}$$

$$\therefore \quad L \tan A - 10 = \log a - \log b$$

$$\therefore \quad L \tan A = \log a - \log b + 10.$$

$\log a = 1{\cdot}6021$

$\log b = 1{\cdot}4314$

$L \quad \tan A = {\cdot}1707 + 10$

$= 10{\cdot}1707$

$\therefore \quad A = 55°59'$

$\therefore \quad B = 34°\ 1'$

$$\sin A = \frac{a}{c}$$

$$c = \frac{a}{\sin A}$$

$\therefore \quad \log c = \log a - L \sin A + 10$

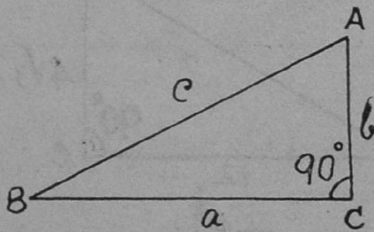
$10 + \log a = 1{\cdot}6021 + 10$

$L \sin A = 9{\cdot}9185$

$\therefore \quad \log c = 1{\cdot}6836$

$\therefore \ c = 48{\cdot}26$

120. வகை மூன்று. செங்கோணத்தில் ஒரு கோணமும் ஒரு பக்கமும் கொடுத்திருப்பின் முக்கோணத்தை விடுவித்தல்.



படம் 81

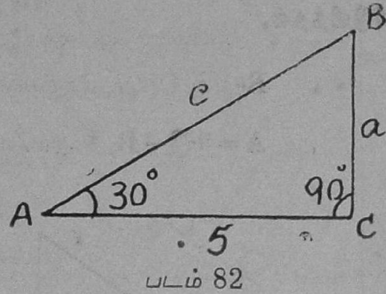
B யும், a-யும் கொடுத்திருக்கிறதென்று கொள்வோம்.

$A = 90° - B \ \therefore$ A-யின் மதிப்பை அறியலாம்

$\tan B = \dfrac{b}{a}$ தொடர்பிலிருந்து b-ஐ கணக்கிடலாம்

$\cos B = \dfrac{a}{c}$ என்பதிலிருந்து c-யின் மதிப்பைக் கணக்கிடலாம்.

பயிற்சி 5. $A = 30°, b = 5, C = 90°$ என்று கொடுத்திருப்பின் முக்கோணத்தை விடுவி.



படம் 82

$B = 90° - A = 60°$

$\tan 30° = \frac{a}{b} = \frac{a}{5}$

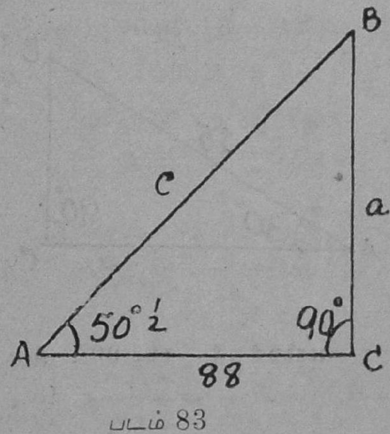
$\therefore \quad a = 5 \tan 30° = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

மேலும் $\cos 30° = \frac{5}{c}$

$\therefore \quad c = 5 \sec 30° = \frac{5 \times 2}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$

பயிற்சி 6.

$C = 90° \; A = 50° \; 2' \; b = 88$ என்று கொடுத்திருப்பின் முக்கோணத்தை விடுவி.



படம் 83

$B = 90° - A = 39° \; 58'$

$\tan A = \frac{a}{b}, \quad \therefore \quad a = b \tan A.$

$\frac{b}{c} = \cos A, \quad \therefore \quad c = \frac{b}{\cos A}.$

$\log a = \log b + L \tan A - 10$

$\log b = 1{\cdot}9445$

$L \tan A = 10\,0767$

$\therefore \log a = 2\,0212$

$\therefore a = 105$

$\log c = \log b - L \cos A + 10$

$\log b = 1{\cdot}9445$

$L \cos A = 9\,8078$

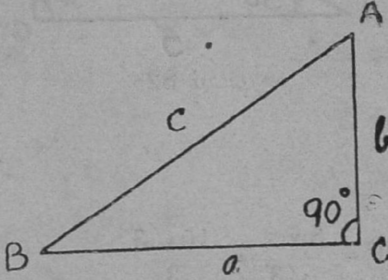
$\therefore \log c = 2{\cdot}1367$

$\therefore c = 137$

121. வகை நான்கு.—செங்கோண முக்கோணத்தில் ஒரு கோணமும், செங்கோண எதிர்சிறையும் கொடுத்திருப்பின் முக்கோணத்தை விடுவித்தல்.

B-யும், C-யும் தெரியுமெனக்கொள்வோம்.

$A = 90° - B$, ஆகவே B-ஐ அறியலாம்.



படம் 84

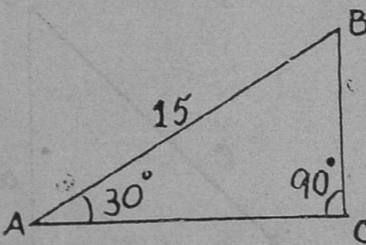
$\cos B = \frac{a}{c}$, $\therefore$ $a = c \cos B$.

ஆகவே a-ஐ கணக்கிடலாம்.

$\sin B = \frac{b}{c}$ $\therefore$ $b = c \sin B$.

ஆகவே b-ஐ கணக்கிடலாம்.

பயிற்சி 7. $C = 90°$, $c = 15$, $A = 30°$ என்று கொடுத்திருப்பின் முக்கோணத்தை விடுவி.



படம் 85

$B = 90° - 30° = 60°$

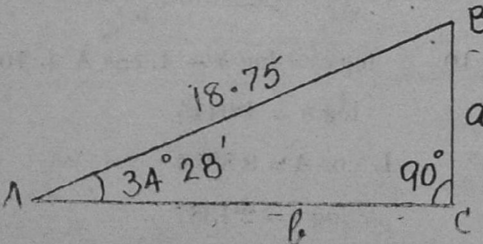
$\sin 30° = \frac{a}{c} = \frac{a}{15}$

$\therefore$ $a = 15 \sin 30° = 7\frac{1}{2}$

$\cos 30° = \frac{b}{c} = \frac{b}{15}$

$\therefore$ $b = 15 \cos 30° = \frac{15 \times \sqrt{3}}{2}$

பயிற்சி 8. $C = 90°$, $A = 34° 28'$ $c = 18{\cdot}75$ என்று கொடுத்திருப்பின் முக்கோணத்தை விடுவி.



படம் 86

$B = 90° - A = 55° 32'$

$\frac{a}{c} = \sin A$, $\therefore a = c \sin A$

$\frac{b}{c} = \cos A$, $\therefore b = c \cos A$

$\log a = \log c + \text{L}\sin \text{A} - 10$

$\log c = 1{\cdot}2730$

$\text{L}\sin \text{A} = 9{\cdot}7528$

$\therefore \log a = 1{\cdot}0258$

$\therefore a = 10{\cdot}61$

$\log b = \log c + \text{L}\cos \text{A} - 10$

$\log c = 1{\cdot}2730$

$\text{L}\cos \text{A} = 9{\cdot}9162$

$\therefore \log b = 1{\cdot}1892$

$\therefore b = 15{\cdot}46$

பயிற்சிகள் 25

கீழ்க்கண்ட முக்கோணங்களை விடுவி. 1—20 வரை பயிற்சிகளிலுள்ள முக்கோணங்களில் $\angle \text{C} = 90°$.

1.	$a = 6$	$c = 12$	2.	$\text{A} = 60°$	$b = 4$
3.	$\text{A} = 30°$	$a = 3$	4.	$a = 4$	$b = 4$
5.	$a = 2$	$c = 2{\cdot}828$	6.	$c = 627$	$\text{A} = 23° 30'$
7.	$c = 2280$	$\text{A} = 28°5'$	8.	$c = 72{\cdot}15$	$\text{A} = 39° 34'$
9.	$c = 93{\cdot}4$	$\text{B} = 76°25$	10.	$c = 200$	$\text{B} = 21°47'$
11.	$a = 48{\cdot}53$	$\text{A} = 36°44'$	12.	$a = 73$	$\text{B} = 68°52'$
13.	$b = 4$	$\text{A} = 37°56$	14.	$b = 50{\cdot}93$	$\text{B} = 43°48'$
15.	$c = 8590$	$a = 4476$	16.	$c = 86{\cdot}53$	$a = 71{\cdot}18$
17.	$c = 9{\cdot}35$	$a = 8{\cdot}49$	18.	$a = 13{\cdot}69$	$b = 16{\cdot}93$
19.	$a = 415{\cdot}4$	$b = 62{\cdot}1$	20.	$a = 38{\cdot}31$	$b = 19{\cdot}52$

21. $\text{B} = 90°$, **A**-யின் வழியாகச் செல்லும் நடுக்கோட்டின் நீளம் $3{\cdot}8$; அது **AB** யோடுள்ள சாய்வு $25°4'$ என்றிருப்பின் முக்கோணத்தை விடுவி.

22. $\text{C} = 40°$, **B, C** வழியாகச் செல்லும் செங்கோடுகளின் நீளங்கள் முறையே $4{\cdot}1$, 6 என்றிருப்பின் முக்கோணத்தை விடுவி.

122. சாய்வு முக்கோணங்களை விடுவித்தல் (Solution of oblique triangles).

சாய்வு முக்கோணங்கள் விடுவித்தல் என்பதுபற்றி ஆராய வேண்டிய வகைகள் பின்வருவன :—

வகை ஒன்று. மூன்று பக்கங்கள் கொடுத்தல்

வகை இரண்டு. இரண்டு பக்கங்களும் அவற்றின் இடைக் கோணமும் கொடுத்தல்.

வகை மூன்று. இரண்டு பக்கங்களும், அவற்றினுள் ஒரு பக்கத்தின் எதிர்கோணமும் கொடுத்தல்.

வகை நான்கு. ஒரு பக்கமும் இரண்டு கோணங்களும் கொடுத்தல்.

123. **வகை ஒன்று.**—a, b, c என்ற **மூன்று பக்கங்கள் கொடுத்திருப்பின் முக்கோணத்தை விடுவித்தல்.**

பக்கங்களின் அளவு கொடுத்திருப்பதால், சுற்றளவின் பாதியான s-ஐ அறியலாம். ஆகையால் $s-a$, $s-b$, $s-c$ என்பவற்றின் மதிப்பை அறியலாம். $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$, $\frac{C}{2}$ என்பவற்றின் மதிப்பைக் கீழ்க்கண்ட வாய்பாடுகளால் கணக்கிடலாம்.

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\;;\;\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}\;;$$

$$\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

A, B, C கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180°. ஆகையால் எதாவது இரு கோணங்களின் மதிப்பைக் கணக்கிட்டால் போதும்.

கோணங்களைக் கிடக்கை வாய்பாடுகளாலும் **(cosine formulae)** கணக்கிடலாம். அப்பொழுது மடக்கைப் பட்டிகையைப் பயன்படுத்தக் கூடிய முறையில் வாய்பாடுகள் இல்லை. ஆகவே மேல்குறித்த இருக்கைத் தொடர்புகளால் கோணங்களைக் கணக்கிடுவது நலம்.

பயிற்சி 9. $a=3{\cdot}41$, $b=2{\cdot}6$, $c=1{\cdot}58$ என்று **ABC** முக்கோணத்தில் இருப்பின் கோணங்களின் அளவு என்ன?

$a = 3{\cdot}41$

$b = 2{\cdot}6$

$c = 1{\cdot}58$

$\therefore\ 2s = 7{\cdot}59$

$\therefore \quad s = 3{\cdot}795 \qquad\qquad \log s = {\cdot}5792$

$s-a = {\cdot}385 \qquad\qquad \log(s-a) = \bar{1}{\cdot}5854$

$s-b = 1{\cdot}195 \qquad\qquad \log(s-b) = {\cdot}0774$

$s-c = 2{\cdot}215 \qquad\qquad \log(s-c) = {\cdot}3454$

$$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{s\,(s-a)}}$$

$$\therefore \ L\tan\frac{A}{2} - 10 = \tfrac{1}{2}\left[\log(s-b) + \log(s-c) - \log s - \log(s-a)\right]$$

$$\therefore \ L\tan\frac{A}{2} = 10 + \tfrac{1}{2}\left({\cdot}0774 + {\cdot}3454 - {\cdot}5792 - \bar{1}{\cdot}5854\right)$$

$$= 10 + \tfrac{1}{2}\,({\cdot}4228 + 1 - 1{\cdot}1646)$$

$$= 10 + \tfrac{1}{2}\,({\cdot}2582)$$

$$= 10{\cdot}1291$$

$\therefore \quad \frac{A}{2} = 53^\circ\ 23'\ 40''.$ ஆகவே $A = 106^\circ\ 47'\ 20''$

$$\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)\,(s-a)}{s\,(s-b)}}$$

$$\therefore \ L\tan\frac{B}{2} - 10 = \tfrac{1}{2}\left[\log(s-c) + \log(s-a) - \log s - \log(s-b)\right]$$

$$\therefore \ L\tan\frac{B}{2} = 10 + \tfrac{1}{2}\left({\cdot}3454 + \bar{1}{\cdot}5854 - {\cdot}5792 - {\cdot}0774\right)$$

$$= 9{\cdot}6371$$

$\therefore \quad \frac{B}{2} = 23^\circ\ 26'\ 40''.$ ஆகவே $B = 46^\circ\ 53'\ 20''$

$$\therefore \quad C = 180^\circ - (106^\circ\ 47'\ 20'' + 46^\circ\ 53'\ 20'')$$

$$= 26^\circ\ 19'.\ 20''$$

நமது கணக்கீடுகள் சரியா, பிழையா என்று பார்ப்பதற்கு கீழ்க்கண்ட முறையைக் கையாளலாம் :—

1	2	3	4	5	6	7
		log		log	பாதி கோணங்கள்	கோணங்கள்
$s = 3{\cdot}795$	r	$\bar{1}\cdot7145$				
$a = 3{\cdot}41$	$(s-a) = {\cdot}385$	$\bar{1}\cdot5854$	$\tan\frac{A}{2}$	$\cdot1291$	$\frac{A}{2} = 53^\circ\ 23'\ 40''$	$A = 106^\circ\ 47'\ 20''$
$b = 2{\cdot}6$	$(s-b) = 1{\cdot}195$	$\cdot0774$	$\tan\frac{B}{2}$	$\bar{1}\cdot6371$	$\frac{B}{2} = 23^\circ\ 26'\ 40''$	$B = 46^\circ\ 53'\ 20''$
$c = 1{\cdot}58$	$(s-c) = 2{\cdot}215$	$\cdot3454$	$\tan\frac{C}{2}$	$\bar{1}\cdot3691$	$\frac{C}{2} = 13^\circ\ 10'\ 10''$	$C = 26^\circ\ 20'\ 20''$
$2s = 7{\cdot}59$	$s = 3{\cdot}795$	$\cdot5792$	s	$\cdot5792$		
	$r^2 =$	$1\cdot4290$	r	$\bar{1}\cdot7145$	$A + B + C =$	$180^\circ - 1' - 0''$

$$r^2 = \frac{\Delta^2}{s^2} = \frac{(s-a)\ (s-b)\ (s-c)}{s}$$

ஆகவே 3வது நிரலிலிருந்து r^2-ன் மடக்கையையும் அதிலிருந்து r-ன் மடக்கையையும் காணலாம்.

மேலும் $r = s \tan\frac{A}{2} \tan\frac{B}{2} \tan\frac{C}{2}$

ஆகவே r-ன் மடக்கையை 5-வது நிரலிலிருந்து காணலாம். ஆகவே 3, 5 நிரல்களிலிருந்து கணக்கிட்ட r-ன் மடக்கை இரண்டும் ஒத்திருத்தல் வேண்டும். 7-வது நிரலின் கூட்டுத்தொகை $180°$ ஆக இருத்தல்வேண்டும். நாம் நான்கிலக்க வாய்பாடுகள் பயன்படுத்துவதால் சிறிது வேற்றுமை வரக்கூடும்.

பயிற்சிகள் 26

கீழ்க்கண்ட முக்கோணங்களில் பக்கங்கள் கொடுத்திருக்கின்றன. அதன் கோணங்களைக் கணக்கிடுக.

1.	$a = 51$	$b = 65$	$c = 20$
2.	$a = 78$	$b = 101$	$c = 20$
3.	$a = 111$	$b = 145$	$c = 40$
4.	$a = 21$	$b = 26$	$c = 31$
5.	$a = 19$	$b = 34$	$c = 49$
6.	$a = 7$	$b = 5$	$c = 8$
7.	$a = 37{\cdot}4$	$b = 14{\cdot}9$	$c = 24{\cdot}9$
8.	$a = 4584$	$b = 5140$	$c = 3624$
9	$a = 74\ 8$	$b = 102{\cdot}6$	$c = 125$
10.	$a = 257$	$b = 178$	$c = 364$

11. ABC முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் $x, y, \sqrt{x^2 + \frac{3}{5}xy + y^2}$ என்றிருப்பின் அதன் மிகப் பெரிய கோணத்தின் மதிப்பு என்ன ?

12. ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் $x^2 + x + 1,\ 2x + 1,\ x^2 - 1$ என்றிருப்பின் அதன் மிகப் பெரிய கோணம் $120°$ என்று நிறுவுக.

13. ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் $a,\ b,\ \sqrt{a^2 + ab + b^2}$ என்றிருப்பின் அதன் மிகப் பெரிய கோணம் என்ன ?

14. ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் $2 + \sqrt{3},\ 2\sqrt{3},\ \sqrt{6}$ எனின் கோணங்களின் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

15. ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}},\ \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}},\ \frac{\sqrt{3}}{2}$ என்றால் அதன் கோணங்களின் மதிப்பு என்ன ?

124. வகை இரண்டு.—இரண்டு பக்கங்களும் அவற்றின் இடைக் கோணமும் (included angle) கொடுத்திருப்பின் முக்கோணத்தை விடுவித்தல்.

முக்கோணத்தில் b, c, A என்பவை கொடுத்திருப்பதாகக் கொள்வோம்.

$$\tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}. \text{ (நேப்பியர் வாய்பாடு)}$$

$$\therefore \quad L\tan\frac{B-C}{2} - 10 = \log(b-c) - \log(b+c) + L\cot\frac{A}{2} - 10$$

$$\therefore \quad L\tan\frac{B-C}{2} = \log(b-c) - \log(b+c) + L\tan\left(90^\circ - \frac{A}{2}\right)$$

மேலெழுதிய சமன் பாட்டின் வலப் பக்க முழுதும் கணக்கிட முடியுமாதலால் $L\tan\frac{B-C}{2}$-ஐ அறியலாம். ஆகவே பட்டிகையிலிருந்து $\frac{B-C}{2}$-ஐ காணலாம்.

$A+B+C=180^\circ$ என்பதால் $\frac{B+C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2}$.

ஆகவே $\frac{B+C}{2}$-ன் மதிப்பைக் காணலாம்.

$$\therefore \quad B = \frac{B+C}{2} + \frac{B-C}{2}; \; C = \frac{B+C}{2} - \frac{B-C}{2}$$

மேலும் $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

ஆகவே $a = \frac{b\sin A}{\sin B}$

$$\therefore \quad \log a = \log b + L\sin A - 10 - L\sin B + 10$$

$$= \log b + L\sin A - L\sin B.$$

ஆகையால் a-ஐயும் கணக்கிட முடியும்,

பயிற்சி 10. ABC முக்கோணத்தில் $a=12$, $b=8$, $C=36°$. எனின் முக்கோணத்தை விடுவி.

$$\tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$$

$$=\frac{12-8}{12+8}\cot 18°.$$

$$=\tfrac{1}{5}\cot 18°=\tfrac{1}{5}\tan 72°$$

$$\therefore\quad L\tan\frac{A-B}{2}=L\tan 72°-\log 5$$

$$=10{\cdot}4882-{\cdot}6990$$

$$=9{\cdot}7892$$

$$\therefore\quad \frac{A-B}{2}=31°\,36'$$

ஆனல் $\dfrac{A+B}{2}=90°-\dfrac{C}{2}=72°$

$$\therefore\quad A=\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}=103°\,36'$$

$$B=\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}=40°\,24'$$

மேலும் $\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{b}{\sin B}$

$$\therefore\quad \log c=\log b+L\sin C-L\sin B.$$

$$=\log 8+L\sin 36°-L\sin 40°\,24'$$

$$={\cdot}9031+9{\cdot}7692-9{\cdot}8117$$

$$={\cdot}8606$$

$$\therefore\ c=\mathbf{7{\cdot}252}.$$

125. முக்கோணத்தில், b, c, A என்பவை கொடுத்திருப்பதாகக் கொள்வோம். முன் தொகுதியில் B, C கோணங்களைக் கணக்கிட்டு அதற்குப்பின் நெடுக்கைவாய்பாட்டால் a-யின் மதிப்பைக் கணக்கிட்டோம். B, C என்பவற்றின் மதிப்புகளைக் கணக்கிடாமலும் a-ஐ அடியிற்கண்டவாறு காணலாம்.

(a) $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A. \quad \text{(கிடக்கை வாய்பாடு)}$$

$$= b^2 + c^2 - 2bc\left(1 - 2\sin^2\frac{A}{2}\right)$$

$$= b^2 + c^2 - 2bc + 4bc\sin^2\frac{A}{2}$$

$$= (b-c)^2 + 4bc\sin^2\frac{A}{2}$$

$$= (b-c)^2\left\{1 + \frac{4bc}{(b-c)^2}\sin^2\frac{A}{2}\right\}$$

$$\tan\theta = \frac{2\sqrt{bc}}{b-c}\sin\frac{A}{2} \text{ எனக்கொள்வோம்.} \qquad (1)$$

அப்பொழுது $a^2 = (b-c)^2(1 + \tan^2\theta)$.

$$= (b-c)^2\sec^2\theta$$

ஆகவே $a = (b-c)\sec\theta$ (2)

b, c என்பவை கொடுத்திருப்பதால் θ-வின் மதிப்புத் தெரியுமானல் (2)-லிருந்து a-ஐ கணக்கிடலாம். θ-வின் மதிப்பு (1)-லிருந்து காணலாம். θ-வை உதவிக்கோணம் **(subsidary angle)** என்று கூறப்படும்.

(b) கிடக்கை வாய்பாட்டைக் கீழ்க்கண்ட முறையிலும் எழுதலாம்.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$= b^2 + c^2 - 2bc\left(2\cos^2\frac{A}{2} - 1\right)$$

$$= (b+c)^2 - 4bc\cos^2\frac{A}{2}$$

$$= (b+c)^2\left\{1 - \frac{4bc}{(b+c)^2}\cos^2\frac{A}{2}\right\}$$

$$\sin\Phi = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\cos\frac{A}{2} \text{ எனக் கொள்வோம்}$$

அப்பொழுது $a^2 = (b+c)^2(1 - \sin^2\Phi)$

$$= (b+c)^2\cos^2\Phi$$

$$\therefore \quad a = (b+c)\cos\Phi.$$

இங்கு Φ உதவிக்கோணம்.

(c) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$$= (b^2+c^2)\left(\cos^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{A}{2}\right) - 2bc\left(\cos^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{A}{2}\right)$$

$$= \cos^2 \frac{A}{2}(b-c)^2 + \sin^2 \frac{A}{2}(b+c)^2$$

$$= (b-c)^2 \cos^2 \frac{A}{2}\left\{1 + \frac{(b+c)^2}{(b-c)^2}\tan^2 \frac{A}{2}\right\}$$

$\tan x = \dfrac{b+c}{b-c} \tan \dfrac{A}{2}$ எனக் கொள்வோம்.

அப்பொழுது $a^2 = (b-c)^2 \cos^2 \dfrac{A}{2} \sec^2 x$

ஆகவே $a = (b-c) \cos \dfrac{A}{2} \sec x.$

இங்கு x உதவிக்கோணம்.

பயிற்சி 11. $a = 17{\cdot}32$, $b = 13{\cdot}47$ $C = 47°20'$ என்றிருப்பின் c-யின் மதிப்பு என்ன ?

$$\tan \theta = \frac{2\sqrt{ab}}{a-b} \sin \frac{C}{2}$$

$$= \frac{2\,(17{\cdot}32 \times 13{\cdot}47)^{\frac{1}{2}}}{3{\cdot}85} \sin 23°40'$$

$L \tan\theta = \log 2 + \frac{1}{2}(\log 17{\cdot}32 + \log 13{\cdot}47) - \log 3{\cdot}85 + L\sin 23°40'$

$= {\cdot}3010 + \frac{1}{2}(1{\cdot}2385 + 1{\cdot}1294) - {\cdot}5855 + 9{\cdot}6036$

$= 10{\cdot}5031.$

$\therefore \quad \theta = 72°\,34'$

மேலும் $\quad c = \dfrac{a-b}{\cos\theta}$

$\therefore \log c = \log(a-b) - L\cos\theta + 10.$

$= \log 3{\cdot}85 - L\cos 72°\,34' + 10.$

$= 5855 - 9{\cdot}4765 + 10$

$= 1{\cdot}1090.$

$\therefore \quad c = 12{\cdot}85$

பயிற்சிகள் 27

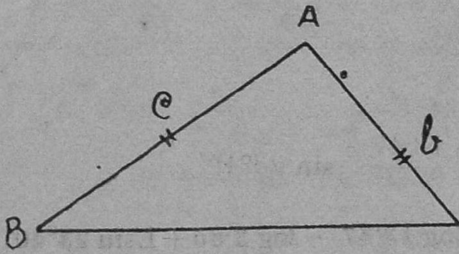
கீழ்க்கண்ட முக்கோணங்களை விடுவி.

1.	$a = 17,$	$b = 12$	$C = 59° 17'$
2.	$a = 55·4$	$b = 33·09$	$C = 30° 24'$
3.	$a = 681$	$c = 243$	$B = 50° 42'$
4.	$b = 55$	$c = 38$	$A = 54° 7'$
5.	$a = 15·72$	$b = 17·08$	$C = 37° 25'$
6.	$a = 35$	$b = 21$	$C = 60°$
7.	$b = ·131$	$c = ·072$	$A = 40°$
8.	$b = 3$	$c = 5$	$A = 101° 32'$

உதவிக் கோணங்களால் முக்கோணங்களில் மூன்றாவது பக்கத்தைக் காண்க.

9.	$a = 9·2$	$b = 6·7$	$C = 70° 12'$
10.	$a = 43$	$b = 32$	$C = 48° 20'$
11.	$b = 233$	$c = 185$	$A = 54°$

126. வகை மூன்று.—ஈரடிவகை (ambiguous case).



படம் 87

இரண்டு பக்கங்களும் அவற்றினுள் ஒன்றின் எதிர்கோணமும் கொடுத்திருப்பின் முக்கோணத்தை விடுவித்தல்.

b, c, B என்பவை கொடுத்திருப்பதாகக் கொள்வோம்.

C-ஐ $\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin B}{b}$ தொடர்பினால் காணலாம்.

$$\sin C = \frac{c}{b} \sin B$$

இரு பக்கமும் மடக்கை எடுப்பின்

$$L \sin C - 10 = \log c - \log b + L \sin B - 10$$

a, b, B என்பவை கொடுத்திருப்பின் C-ஐ கணக்கிடலாம்.

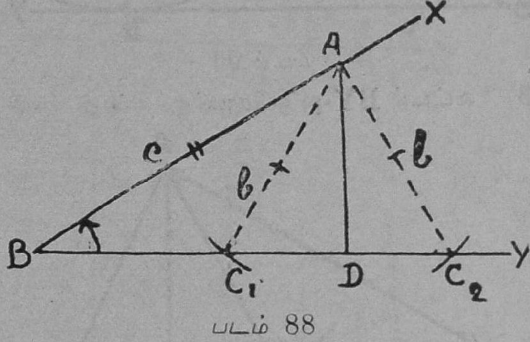
$A = 180° - B - C$. இதனால் A-யின் மதிப்பையும் கணக்கிடலாம்.

எஞ்சிய a பக்கத்தை $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ தொடர்பினால் கணக்கிடலாம்.

127. $\sin C = \frac{c}{b} \sin B$ தொடர்பு சில வகைகளில் C-க்கு ஒரு மதிப்பும், சில வகைகளில் இரண்டு மதிப்புகளும், சில வகைகளில் ஒன்றுமில்லாமலும் கொடுக்கும். அவை என்னென்ன என்பதை ஆராய்வோம்.

128. சரடி வகையை வடிவ கணித மூலம் ஆராய்தல். (Geometrical discussion)

b, *c*, B என்பவை கொடுத்து ABC முக்கோணம் வரையவேண்டுமெனக் கொள்வோம். முதலில் ABY = B, AB = *c* என்று இருக்குமாறு வரைந்து A-ஐ மையமாக *b* ஆரையுள்ள ஒரு வட்டம் வரைவோம்.



படம் 88

இவ்வட்டம் BY-ஐ வெட்டும் புள்ளியோ, புள்ளிகளோ C-யின் இடத்தைக் குறிக்கும்.

AD-ஐ BY-க்குக் குத்துக்கோடாக வரைக.

$$\sin B = \frac{AD}{AB} \quad \therefore \quad AD = AB \sin B = c \sin B.$$

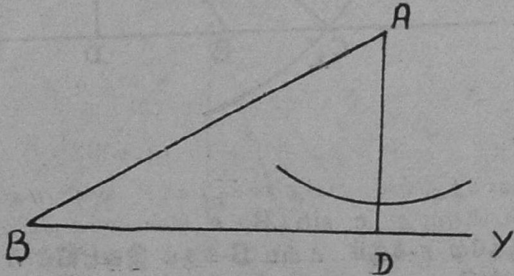
(*a*) B **குறுங்கோணம் என்று கொள்வோம்.** C-ஐக் காண A-ஐ மையமாக, *b* ஆரையுள்ள ஒரு வட்டம் வரைந்தோம். அவ்வட்டம் கீழ்க்கொடுத்திருப்பவைகளில் ஏதாவது ஒன்றைச் செய்யலாம்.

(1) வட்டம் BY-ஐ வெட்டாமலிருக்கலாம்.

அப்பொழுது முக்கோணத்தை வரையமுடியாது.

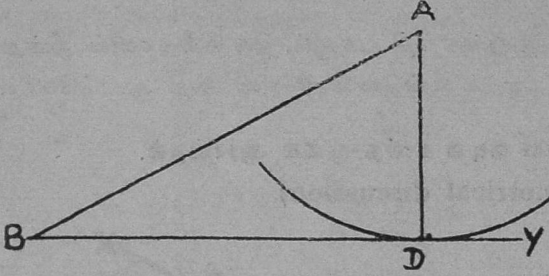
இவ்விடத்தில் $b < AD$.

ஆகையால் $b < c \sin B$.



படம் 89

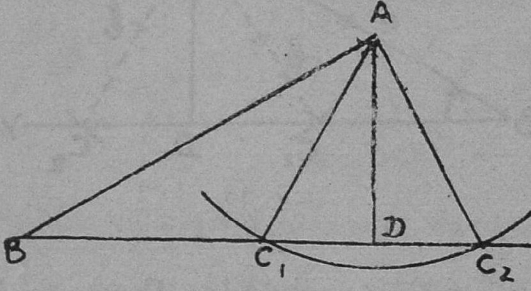
(2) வட்டம், BY-ஐ ஒரு புள்ளியில் தொடலாம்.



படம் 90

அப்பொழுது ஒரே ஒரு முக்கோணந்தான் வரையமுடியும். அது செங்கோண முக்கோணமாகும். அப்பொழுது $b = AD = c \sin B$.

(3) வட்டம் BY-ஐ ஒரே பக்கத்தில் இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டலாம்.

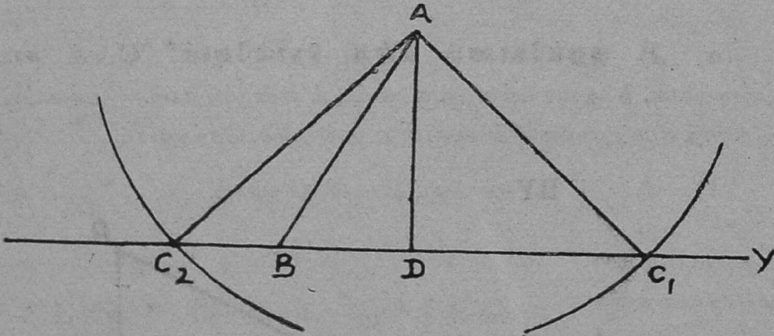


படம் 91

ஆகவே கொடுத்திருக்கின்ற நிபந்தனைக்கிணங்க ABC_1, ABC_2 என்ற இரு முக்கோணங்கள் கிடைக்கும். அப்பொழுது $c > b > AD$ ஆகவே $c > b > c \sin B$.

இவ்வாறு ஒரே அடுக்கு நிபந்தனைகளுக்கே வெவ்வேறான இரண்டு முக்கோணங்கள் கிடைப்பதால் இதனை **சரடிவகை** எனக் கூறப்படும்.

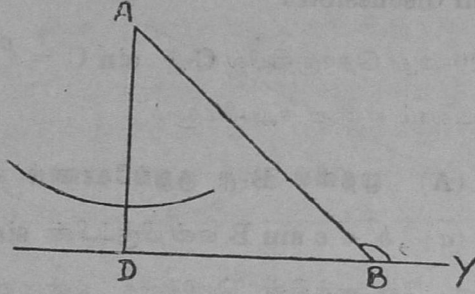
(4) வட்டம் BY-ஐ இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டலாம். ஆனால் அப்புள்ளிகளில் ஒன்று YB-யின் நீட்சியில் அமையக்கூடும். ஆகவே



படம் 92

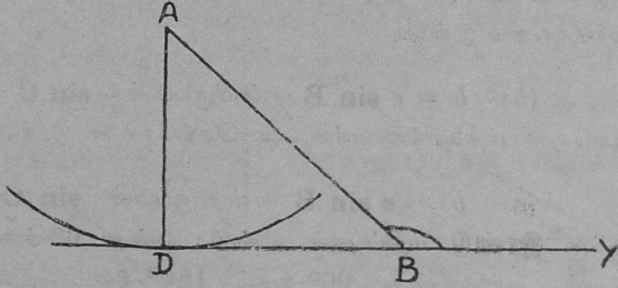
கொடுத்துள்ள நிபந்தனைக்கிணங்க ஒரு முக்கோணந்தான் கிடைக்கும். அப்பொழுது $c \sin B$, c என்பவற்றைவிட b பெரிதாக இருக்கும். **ஆகவே c-க்கும், $c \sin B$-க்கும் இடையில் b இருந்தால்தான் சரடிவகை உண்டு.**

(*b*) B விரிகோணம் எனக் கொள்வோம்.

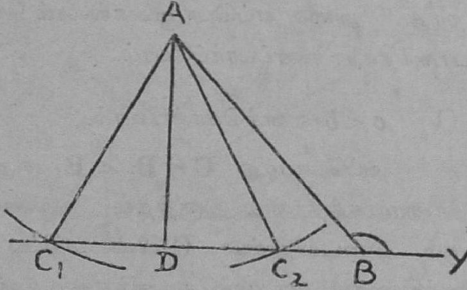


படம் 93

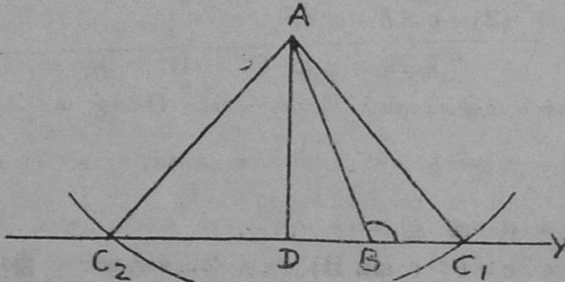
கொடுத்திருக்கும் நிபந்தனைக் கிணங்கப் படம் 4-ல் தான் ஒரு முக்கோணம் வரையமுடியும். அப்பொழுது $b > c$. மற்ற மூன்று படங்களில் நிபந்தனைக் கிணங்க முக்கோணம் வரைய இயலாது.



படம் 94



படம் 95



படம் 96

129. ஈரடிவகையைக் கோண கணித மூலம் ஆராய்தல் (Trigonometrical discussion).

126-வது தொகுதியில் C-ஐ $\sin C = \dfrac{c \sin B}{b}$ தொடர்பினுல் கணக்கிடலாம் என்று நிறுவினேம்.

(A) முதலில் B-ஐ குறுங்கோணம் எனக் கொள்வோம்.

(*a*) $b < c \sin B$ என்றிருப்பின் $\sin C > 1$.

ஒரு கோணத்தின் நெடுக்கை ஒன்றைவிடக் கூடுதலாக இருக்காதலால் C-க்கு ஒரு மதிப்பும் இல்லை. ஆகவே நிபந்தனைக்கிணங்க முக்கோணம் இல்லை.

(*b*) $b = c \sin B$ என்றிருப்பின் $\sin C = 1 \quad \therefore \quad C = 90°$ ஆகவே நிபந்தனைக்கிணங்க ஒரு செங்கோண முக்கோணந்தான் உண்டு.

(c) $b > c \sin B$ என்றிருப்பின் $\sin C < 1$. ஆகையால் C-க்கு **இரண்டு** மதிப்புகள் உண்டு; ஒன்று 0°-க்கும் 90°-க்கும் இடையிலும், மற்றொன்று 90°-க்கும் 180°-க்கும் இடையிலும் இருக்கும். இவ்விரு மதிப்புகளும் எப்பொழுதும் கொடுத்திருக்கும் நிபந்தனைகளுக்குப் பொருந்தாது. அவை எப்பொழுதெல்லாம் பொருந்தும், எப்பொழுதெல்லாம் பொருந்தாது எனப்பார்ப்போம்.

(1) $c < b$ எனக்கொள்வோம்.

அப்பொழுது $C < B$. B குறுங்கோணமாதலால் C-யும் குறுங்கோணமாகத்தான் இருத்தல் வேண்டும். ஆகவே 90°-க்கும் 180°-க்கும் இடையிலுள்ள C-யின் மதிப்பு பொருந்தாது. ஆகையால் நிபந்தனைக்கிணங்க ஒரு முக்கோணந்தான் உண்டு.

(2) $c > b$ எனக்கொள்வோம்.

அப்பொழுது $C > B$. ஆகையால் C-க்கு கிடைக்கும் இரண்டு மதிப்புகளும் பொருந்தும். C-யின் மதிப்புகளுக்கு நேர்நிலையாக A-க்கு இரண்டு மதிப்புகள் கிடைக்கும். ஆகவே $a = \dfrac{b \sin A}{\sin B}$ தொடர்பினுல் *a*-க்கு இரண்டு மதிப்புகள் கிடைக்கும். எனவே இவ்வகையில் (அ-து. $c > b > c \sin B$) நிபந்தனைக்கிணங்க **இரண்டு முக்கோணங்கள்** இருக்கும்.

B. இரண்டாவதாக B-ஐ விரிகோணம் என்று கொள்வோம்.

(1) $c=b$ என்றோ $c>b$ என்றோ இருப்பின் $\sin C = \dfrac{c \sin B}{b}$

தொடர்பினுல் கிடைப்பது $\sin C = \sin B$ அல்லது $\sin C > \sin B$. அஃதாவது $C = B$ அல்லது $C > B$. B ஒரு விரிகோணமாகையால் C-யும் ஒரு விரிகோணமாகும். ஒரு முக்கோணத்தில் இருகோணங்கள் விரி கோணங்களாக இருக்காதபடியால், அவ்விதம் இருக்கமுடியாது.

(2) $c>b$ என்றிருப்பின் $\sin C > \sin B$. ஆகவே $C > B$. ஆகையால் C-க்குக் கிடைக்கும் மதிப்புகளில் குறுங்கோண மதிப்பு மட்டும் தான் பொருந்தும். விரிகோண மதிப்பை எடுத்தால் முக்கோணத்தில் இருகோணங்கள் விரிகோணமெனக் கிடைக்கின்றதால் அம்மதிப்பைத் தள்ளிவிடலாம்.

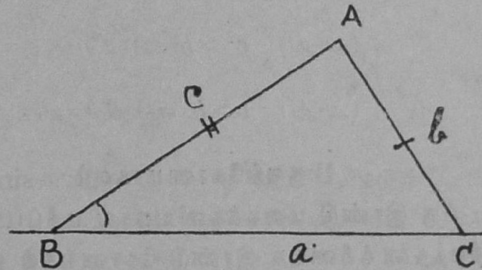
130. ஈரடி வகையை இயற்கணித மூலம் ஆராய்தல் (Algebraical discussion).

b, c பக்கங்களும், B கோணமும் கொடுத்திருக்கின்றன எனக் கொள்வோம்.

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B.$

$\therefore\ a^2 - 2ac \cos B = b^2 - c^2$

$c^2 \cos^2 B$ ஐ இரண்டு பக்கமும் கூட்டின்



படம் 97

$$a^2 - 2ac \cos B + c^2 \cos^2 B = b^2 - c^2 + c^2 \cos^2 B.$$

(அது) $(a - c \cos B)^2 = b^2 - c^2 \sin^2 B.$

$$\therefore\ a - c \cos B = \pm \sqrt{b^2 - c^2 \sin^2 B}.$$

$$\therefore\ a = c \cos B \pm \sqrt{b^2 - c^2 \sin^2 B}.$$

b, c, B என்பவை கொடுத்திருக்கின்றபடியால் சமன்பாட்டினுல் a-ஐ காண முடியும்.

(*a*) $b < c \sin B$ என்றிருப்பின் $b^2 - c^2 \sin^2 B$ குறைக் கணியமாகும். ஆகவே $\sqrt{b^2 - c^2 \sin^2 B}$ கற்பனைத் தொகையாகும் (**imaginary quantity**). ஆகையால் a-ஐ காண இயலாது. அப்பொழுது நிபந்தனைக் கிணங்க முக்கோணம் இல்லை.

(*b*) $b = c \sin B$ என்றிருப்பின் a-க்கு, $c \cos B$ என்ற ஒரு மதிப்புத்தான் கிடைக்கும். ஆகவே நிபந்தனைக்கிணங்க ஒரு செங்கோண முக்கோணந்தான் உண்டு.

(c) $b > c \sin B$ என்றிருப்பின் a-க்கு இரண்டு மதிப்புகள் கிடைக்கும். a மிகைக்கணியமாதலால் $c \cos B \pm \sqrt{b^2 - c^2 \sin^2 B}$ என்பவையும் மிகைக் கணியங்களாக இருந்தால்தான் நிபந்தனைக் கிணங்க இரண்டு முக்கோணங்கள் கிடைக்கும். B குறுங்கோணமாக இருந்தால் $c \cos B + \sqrt{b^2 - c^2 \sin^2 B}$ எப்பொழுதும் மிகைக்கணியமாக இருக்கும். $c \cos B - \sqrt{b^2 - \sin^2 B}$ என்பது மிகைக்கணியமாக இருக்க வேண்டுமானல் $c \cos B > \sqrt{b^2 - c^2 \sin^2 B}$ என்றிருத்தல்வேண்டும்.

(அது) $c^2 \cos^2 B > b^2 - c^2 \sin^2 B$.

(அது) $c^2 \cos^2 B + c^2 \sin^2 B > b^2$.

(அ-து) $c^2 > b^2$.

(அ-து) $c > b$ என்றிருக்கவேண்டும்.

ஆகவே B குறுங்கோணமாகவும், $c \sin B < b < c$ ஆகவும் இருப்பின் a-க்கு இரண்டு மிகைக்கணியமான மதிப்புகள் கிடைக்கும். அப்பொழுது நிபந்தனைக்கிணங்க இரண்டு கோணங்கள் உண்டு.

$b > c$ என்றிருப்பின் $c \cos B - \sqrt{b^2 - c^2 \sin^2 B}$ என்பது குறைக் கணியமாகும். ஆகவே a-க்கு மிகைக்கணியமான $c \cos B + \sqrt{b^2 - c^2 \sin^2 B}$ என்ற ஒரு மதிப்புத்தான் உண்டு. ஆகையால் நிபந்தனைக்கிணங்க ஒரு முக்கோணந்தான் கிடைக்கும்.

(*d*) B விரிகோணமாக இருப்பின் $c \cos B$-யின் மதிப்பு எப்பொழுதும் குறைக்கணியமாகவே இருக்கும். ஆகவே a-யின் $c \cos B - \sqrt{b^2 - c^2 \sin^2 B}$ என்ற மதிப்பு குறைக்கணியமாக இருப்பதால் இந்த மதிப்பு பொருந்தாது.

a-யின் அடுத்த மதிப்பான $c \cos B + \sqrt{b^2 - c^2 \sin^2 B}$ என்பது மிகைக்கணியமாக இருந்தால்தான் ஒரு முக்கோணமாவது கிடைக்கும். அதற்காக $\sqrt{b^2 - c^2 \sin^2 B} > - c \cos B$ என்றிருத்தல் வேண்டும்.

(அ-து) $b^2 - c^2 \sin^2 B > c^2 \cos^2 B$

(அ-து) $b^2 > c^2 \sin^2 B + c^2 \cos^2 B$

(அ-து) $b^2 > c^2$

(அ-து) $b > c.$

ஆகவே B விரிகோணமாக இருந்து $b > c$ என்றிருந்தால்தான் நிபந்தனைக் கிணங்க ஒரு முக்கோணம் கிடைக்கும். இல்லையேல் அதாவது $b > c$ என்றிருப்பின் ஒரு முக்கோணமும் கிடைக்காது.

131. நாம் முன் தொகுதிகளில் நிறுவினவற்றை கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணையில் குறிக்கலாம் :—

வகை	நிபந்தனைகள்	தீர்வுகள்
	B. குறுங்கோணம்.	
1	$b < c \sin B$	தீர்வு இல்லை
2	$b = c \sin B$	ஒரு தீர்வுதான் உண்டு. அது செங்கோண முக்கோணமாகும்
3	$c > b > c \sin B$	இரண்டு தீர்வுகள். ஒன்று குறுங்கோண முக்கோணம்; மற்றொன்று விரிகோண முக்கோணம்
4	$b = c$	ஒரு தீர்வு. அது இரு சரிச்சிறைய முக்கோணம்
5	$b > c$	ஒரு தீர்வு. குறுங்கோண முக்கோணம். விரிகோண முக்கோணம் கொடுத்திருக்கும் நிபந்தனைகளுக்குப் பொருந்தாது

B. விரிகோணம்.

1	$b < c$	தீர்வு இல்லை
2	$b = c$	தீர்வு இல்லை
3	$b > c$	ஒரு தீர்வு. விரிகோணம் முக்கோணம். மற்ற குறுங்கோண முக்கோணம் கொடுத்திருக்கும் நிபந்தனைகளுக்குப் பொருந்தாது.

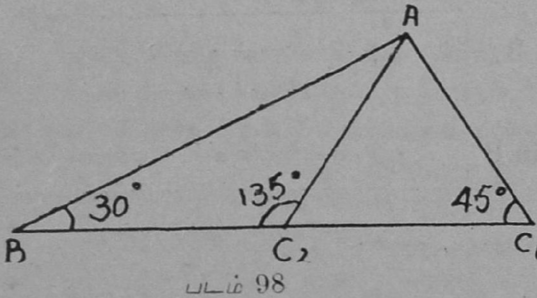
பயிற்சி 12 $B = 30°, b = \sqrt{6}, c = 2\sqrt{3}$ என்று கொடுத்திருப்பின் முக்கோணத்தை விடுவி.

$$\sin C = \frac{c \sin B}{b} = \frac{2\sqrt{3} \sin 30°}{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\therefore \; c = 45°$ அல்லது $135°$.

$c \sin B < b < c$ என்றிருப்பதால் c-யின் இரண்டு மதிப்புகளும் பொருந்தும்.



படம் 98

ஆகவே நிபந்தனைக்கிணங்க இரண்டு முக்கோணங்கள் உண்டு. அவ்விரண்டு முக்கோணங்களைப் படத்தில் காணலாம்.

BC_1, BC_2 பக்கங்களை முறையே a_1, a_2 என்றும், BAC_1, BAC_2 கோணங்களை முறையே A_1, A_2 என்றும் கொள்வோம்.

(1) ABC_1 முக்கோணத்தில் $B = 30°, C_1 = 45°$

$\therefore \quad A_1 = 105°$

ஆகவே $a_1 = \frac{b \sin A_1}{\sin B} = \frac{\sqrt{6} \sin 105^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{6} \sin 75^\circ}{\sin 30^\circ}$

$= \frac{\sqrt{6} . (\sqrt{3}+1)}{\frac{1}{2} . 2\sqrt{2}} = 3 + \sqrt{3}.$

(2) ABC_2 முக்கோணத்தில் $B = 30^\circ$, $C_2 = 135^\circ$

$\therefore \ A_2 = 15^\circ.$

ஆகவே $a_2 = \frac{b \sin A_2}{\sin B} = \frac{\sqrt{6} \sin 15^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{\frac{1}{2}} \frac{(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}} = 3 - \sqrt{3}$

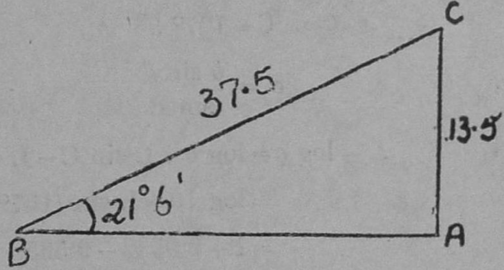
ஆகவே தீர்வுகள் பின்வருவன :—

$C = 45^\circ$ அல்லது 135°

$A = 105^\circ$,, 15°

$a = 3 + \sqrt{3}$,, $3 - \sqrt{3}$

பயிற்சி 13. $a = 37{\cdot}5$, $b = 13{\cdot}5$, $B = 21^\circ 6'$ என்று கொடுத்திருப்பின் முக்கோணத்தை விடுவி.



படம் 99

$\sin A = \frac{a \sin B}{b}$

$= \frac{37{\cdot}5 \sin 21^\circ 6'}{13{\cdot}5}$

$= \frac{37{\cdot}5 \times {\cdot}36}{13{\cdot}5} = 1$

$\therefore \ A = 90^\circ \quad \therefore \ C = 68^\circ \ 54'$

$c = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{13{\cdot}5 \times \sin 68^\circ 54'}{\sin 21^\circ 6'}$

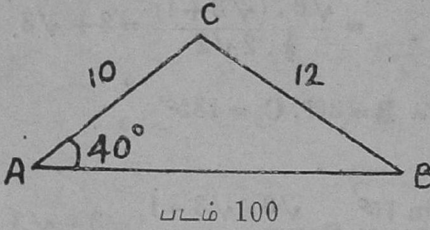
$= \frac{13{\cdot}5 \times {\cdot}9330}{{\cdot}36}$

$= \frac{1{\cdot}5 \times {\cdot}9330}{{\cdot}04}$

$= 34{\cdot}995.$

குறிப்பு :—$b = a \sin B$ என்றிருப்பதால் நிபந்தனைக்கிணங்க ஒரு முக்கோணந்தான் உண்டு. அது செங்கோண முக்கோணம்.

பயிற்சி 14. $a=12, b=10, A=40°$ என்று கொடுத்திருப்பின் முக்கோணத்தை விடுவி.



படம் 100

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}$$

$$= \frac{10 \sin 40°}{12}$$

$$= \frac{10 \times \cdot 6428}{12}$$

$$= \cdot 5357$$

பட்டிகையிலிருந்து **sin 32° 24′** அல்லது **sin 147° 36′ = ·5357** என்று கிடைக்கிறது.

$\therefore \quad B = 32° 24'$ அல்லது $147° 36'$

B-க்கு 147° 36′ மதிப்பு இருத்தல் முடியாது ; ஏனெனின் **A = 40°, A + B + C =** 180°.

$\therefore \quad B = 32° 24'$

ஆகவே $\quad C = 107° 36'$

$$c = \frac{b \sin C}{\sin B}$$

$\therefore \quad \log c = \log b + L \sin C - L \sin B$

$= \log 10 + L \sin (107° 36') - L \sin (32° 24')$

$= 1 + 9 \cdot 9532 - 9 \cdot 5358$

$= 1 \cdot 4174$

$\therefore \quad c = 26 \cdot 14.$

குறிப்பு :— $a > b$ என்றிருப்பதால் நிபந்தனைக்கிணங்க ஒரு முக்கோணந்தான் கிடைக்கும்.

பயிற்சி 15. b, c, **B** என்பவை கொடுத்துள்ளவை ஆகவும் $b < c$ ஆகவும் ; a_1, a_2 என்பவை மூன்றாவது பக்கத்தின் மதிப்புகளாகவுமிருப்பின் $(a_1 - a_2)^2 + (a_1 + a_2)^2 \tan^2 B = 4b^2$ என்று நிறுவுக.

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$. (கிடக்கை வாய்பாடு)

(அ-து) $a^2 - 2c \cos B \, a + c^2 - b^2 = 0.$

ஆகவே a_1, a_2 என்பவை மேலிருக்கும் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகும்.

$\therefore \quad a_1 + a_2 = 2c \cos B$

$a_1 a_2 = c^2 - b^2$

$(a_1 - a_2)^2 = (a_1 + a_2)^2 - 4\, a_1 a_2$

$= 4c^2 \cos^2 B - 4\,(c^2 - b^2)$

$= 4b^2 - 4c^2 \sin^2 B$

ஆகவே $(a_1 - a_2)^2 + (a_1 + a_2)^2 \tan^2 B.$

$= 4b^2 - 4c^2 \sin^2 B + 4c^2 \cos^2 B \tan^2 B$

$= 4b^2 - 4c^2 \sin^2 B + 4c^2 \sin^2 B$

$= 4b^2.$

பயிற்சி 16. ஈரடி வகையில் C, c, a என்பவை கொடுத்துள்ளவை என்றும், $a > c > a \sin C$ என்றும், b-யின் மதிப்புகள் b_1, b_2 என்றும், C-யின் எதிர்பக்கத்தின் இருப்பிடங்களின் இடைக்கோணம் θ என்றுமிருப்பின்

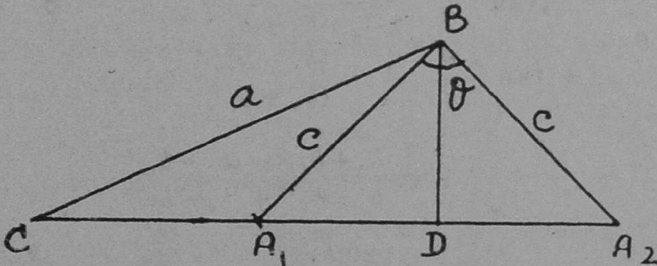
$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{b_2 - b_1}{b_2 + b_1} \cot C$$ என்று நிறுவுக.

மேலும் $C = 45°$ என்றிருப்பின் $\cos\theta = \dfrac{2b_1 b_2}{b_1^2 + b_2^2}$ என்று நிறுவுக.

$CA_1 = b_1, \; CA_2 = b_2$

ஆகவே $A_1A_2 = b_2 - b_1$

B-லிருந்து CA_2-க்கு BD குத்துக்கோடு வரைக.



படம் 101

$BA_1 = BA_2$ என்பதால் $A_1BD = A_2BD$.

$$\therefore \quad A_1BD = \frac{\theta}{2}.$$

மேலும் A_1A_2-வின் நடுப்புள்ளி D ஆகும்.

$$CD = CA_1 + A_1D = b_1 + \frac{b_2 - b_1}{2} = \frac{b_1 + b_2}{2}$$

CBD முக்கோணத்தில் $\tan C = \dfrac{BD}{CD}$

$$\therefore \quad BD = CD \tan C.$$

$$= \frac{b_1 + b_2}{2} \tan C.$$

A_1BD முக்கோணத்தில்

$$\tan A_1BD = \frac{A_1D}{BD}$$

(அ-து) $$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{b_2 - b_1}{2} \div \frac{b_1 + b_2}{2} \tan C.$$

$$= \frac{b_2 - b_1}{b_1 + b_2} \cot C.$$

$C = 45°$ என்பதால் $\cot C = 1$.

ஆகவே $$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{b_2 - b_1}{b_2 + b_1}.$$

$$\cos\theta = \frac{1 - \tan^2\dfrac{\theta}{2}}{1 + \tan^2\dfrac{\theta}{2}} = \frac{1 - \dfrac{(b_2 - b_1)^2}{(b_2 + b_1)^2}}{1 + \dfrac{(b_2 - b_1)^2}{(b_2 + b_1)^2}}.$$

$$= \frac{(b_2 + b_1)^2 - (b_2 - b_1)^2}{(b_2 + b_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}.$$

$$= \frac{2b_1b_2}{b_1^2 + b_2^2}.$$

பயிற்சிகள் 28

கீழ்க் கொடுத்திருக்கும் முக்கோணங்களை விடுவி.

1. $a=5\sqrt{3}$, $b=15$, $A=30°$.
2. $a=3+\sqrt{3}$, $c=3-\sqrt{3}$, $C=15°$.
3. $a=7{\cdot}81$, $b=6{\cdot}24$, $B=51°\ 15'$.
4. $b=8{\cdot}46$, $c=6{\cdot}38$, $B=127°\ 20'$.
5. $a=5{\cdot}18$, $b=6{\cdot}26$, $A=54°35'$.
6. $a=7{\cdot}64$, $c=8{\cdot}23$, $C=63°\ 30'$.
7. $a=513$, $c=724$, $C=132°\ 30'$.
8. $a=4584$, $c=5140$, $A=60°\ 10'$.
9. $a=225$, $c=120$, $A=52°$.
10. $a=50$, $b=70$; $A=62°$.
11. $c=74$, $b=56$, $B=35°\ 15'$.
12. $a=7$, $c=10$, $A=40°$.
13. $a=113$, $b=92$, $A=22°\ 53'$.
14. $a=7$, $c=10$, $A=40°\ 27'$.
15. $a=97$, $b=119$, $A=50°$.

16. a, b, A என்பவை கொடுத்திருப்பதாகவும், c_1, c_2 என்பவை ஈரடிவகையில் மூன்ருவது பக்கத்தின் மதிப்புகளாகவும், $C_1 > C_2$ ஆகவும் இருப்பின் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக :—

(1) $c_1-c_2=2a\cos B_1$.

(2) $\cos\dfrac{C_1-C_2}{2}=\dfrac{b\sin A}{a}$.

(3) $\sin\dfrac{C_1+C_2}{2}\ \sin\dfrac{C_1-C_2}{2}=\cos A\cos B_1$.

(4) $c_1^2+c_2^2-2c_1c_2\cos 2A=4a^2\cos^2 A$.

(5) $\dfrac{\sin C_1}{\sin B_1}+\dfrac{\sin C_2}{\sin B_2}=2\cos A$.

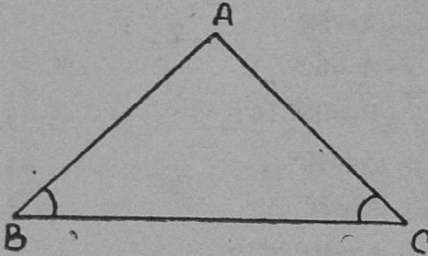
(6) $\tan A=\cot\dfrac{C_1+C_2}{2}$.

17. ஒரு முக்கோணத்தில் a, c, C என்பவை கொடுத்திருப்பதாகவும், b_1, b_2 என்பவை மூன்ருவது பக்கத்தின் மதிப்புகளாகவும், r_1, r_2 என்பவை நிபந்தனைக்கிணங்கக் கிடைக்கும் முக்கோணங்களின் உள் ஆரைகளாகவும் இருப்பின் பின் வருவனவற்றை நிறுவுக:—

(1) $\left(\frac{b_1}{r_1} - \cot\frac{C}{2}\right)\left(\frac{b_2}{r_2} - \cot\frac{C}{2}\right) = 1.$

(2) $r_1 r_2 = a(a-c)\sin^2\frac{C}{2}.$

132. வகை நான்கு.—ஒரு பக்கமும், இரண்டு கோணங்களும் கொடுத்திருப்பின் முக்கோணத்தை விடுவித்தல்.



படம் 102

a, B, C என்பவை கொடுத்திருப்பதாகக் கொள்வோம்.

B-யும் C-யும் கொடுத்திருப்பதால் A-யின் மதிப்பைக் கணக்கிடலாம். $A = 180° - B - C.$ b, c பக்கங்களைக் கீழ்க்கண்ட வாய்பாடுகளினுல் கணக்கிடலாம்.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

$$\therefore \quad b = \frac{a \sin B}{\sin A}.$$

$$\therefore \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

பயிற்சிகள் 29

கீழ்க் கொடுத்திருக்கும் முக்கோணங்களை விடுவி.

1.	$a=12$,	$B=40°$,	$C=75°$.
2.	$b=60$,	$A=50°$,	$C=75°$.
3.	$a=5·614$,	$A=41° 20°$	$B=59° 17'$.
4.	$a=14·78$,	$B=110° 32'$,	$C=47° 10'$.
5.	$a=6·35$,	$B=34° 16'$	$C=27° 33'$.
6.	$b=251$,	$B=129° 15'$,	$C=32° 50'$.
7.	$a=87·2$,	$A=127° 30'$,	$C=32° 5'$.

அதிகாரம் 11

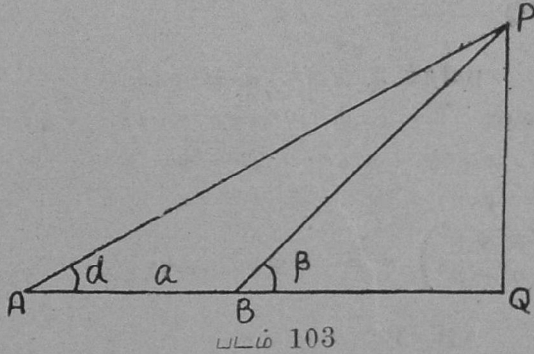
உயரங்களும் தொலைகளும் (Heights and distances)

133. மூன்றாவது அதிகாரத்தில், செங்கோண முக்கோணத்தின் தீர்வுகளைப் பயன்படுத்தி உயரங்களும் தொலைகளும் அடங்கிய சில சுலபமான கணக்குகளைப் பார்த்தோம். இவ்வதிகாரத்தில் சிறிது கடினமானதும், முக்கோணங்களின் தீர்வுகள் மாத்திரமின்றி வடிவ கணிதத் தேற்றங்களும் கோண கணிதத் தேற்றங்களும் மடக்கை வாய்பாடுகளும் ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்திச் செய்யும் சில கணக்குகளைப் பார்ப்போம். முதலில் ஒரே தளத்தில் எடுக்கும் அளவுகள்கொண்ட கணக்குகளையும், பிறகு பல தளங்களில் எடுக்கும் அளவுகள்கொண்ட கணக்குகளையும் பார்ப்போம்.

ஒரே தளத்தில் எடுக்கும் அளவுகள்கொண்ட கணக்குகள்

பயிற்சி 1. ஒரு கோபுரத்தின் அடிப் பாகம் வழிச் செல்லும் கோட்டிலிருக்கும் a அடி இடைப்பட்ட இரண்டு இடங்களிலிருந்து கோபுர உச்சியின் ஏற்றக்கோணங்கள் α, β எனின் கோபுரத்தின் உயரமென்ன?

QP-ஐ கோபுரமாகவும், பார்க்கும் இடங்களை **A, B** ஆகவும் கொள்வோம்.



படம் 103

PAB முக்கோணத்தில்

$$\frac{AB}{\sin APB} = \frac{BP}{\sin BAP}$$

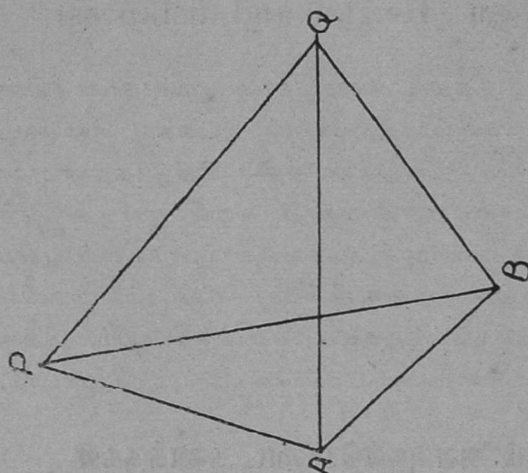
$$\therefore \quad \frac{a}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{BP}{\sin\alpha}$$

$$\therefore \quad BP = \frac{a\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}.$$

BPQ முக்கோணத்தில் $PQ = BP\sin\beta$.

$$\therefore \quad PQ = \frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}.$$

பயிற்சி 2. பார்வையிலிருக்கும் ஆனால் செல்லமுடியாத இரண்டு இடங்களின் இடைப்பட்ட தொலையைக் காணுதல்.



படம் 104

அவ்விடங்கள் **P, Q** என்று கொள்வோம். **P, Q** இடங்களைச் செல்லமுடியுமான **A, B** இடங்களிலிருந்து பார்க்க முடியுமெனக் கொள்வோம். கருவிகள் மூலம் **PAQ, QAB, PBA, ABQ** கோணங்களின் அளவுகளை அறியலாம்.

AB-யின் நீளத்தைக் காண்க.

PAB முக்கோணத்தில் **AB, PAB, PBA** என்பவை தெரிவதால் **PB**-யின் நீளத்தைக் கணக்கிடலாம். அதேமாதிரி **ABQ** முக்கோணத்திலிருந்து **BQ**-யின் நீளத்தை அறியலாம். **PBQ**-யின் அளவு தெரியும். ஆகவே **PBQ** முக்கோணத்தில் **PB, BQ, PBQ** என்பவை தெரிவதால் **PQ**-ஐக் கணக்கிடலாம்.

பயிற்சி 3. ஒரு தூணின்மேல் ஒரு கொடி நாட்டியிருக்கிறது. தூணும் கொடியும் படுக்கைத் தளத்தின் தூணின் அடிப்பாகத்திலிருந்து a அடிக்கு அப்பால் இருக்கும் ஒரு புள்ளியோடு சமகோணங்கள் பிறப்பிக்கின்றன. தூணின் உயரம் h அடி ஆயின் கொடியின் உயரம் $\left(\frac{a^2+h^2}{a^2-h^2}\right)$ h அடி என்று நிறுவுக.

AB, BC என்பவற்றை முறையே தூணும் கொடியும் எனவும், கொடியின் உயரம் x எனவும், D-ல் கொடியும் தூணும் சமகோணங்கள் பிறப்பிக்கின்றன எனவும் கொள்வோம்.

$$\tan 2\theta = \frac{AC}{DA} = \frac{x+h}{a}. \qquad (1)$$

$$\tan \theta = \frac{h}{a}. \qquad (2)$$

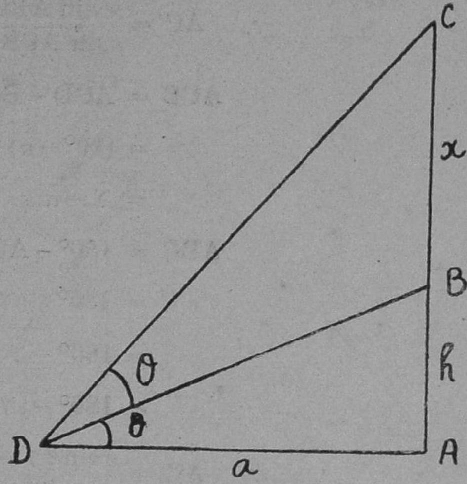
ஆகவே (1)-லிருந்து

$x = a \tan 2\theta - h.$

$= \dfrac{2a \tan\theta}{1-\tan^2\theta} - h.$

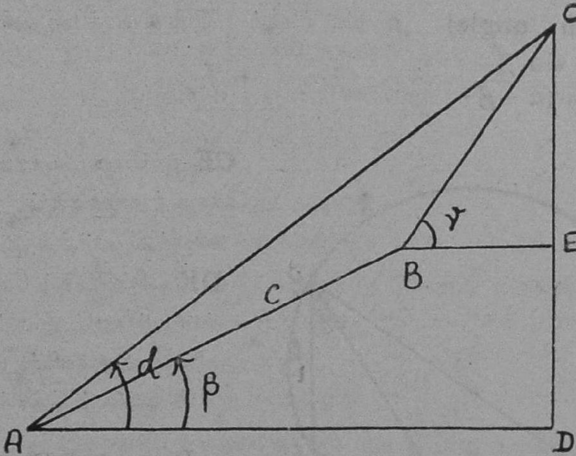
$= \dfrac{2a\dfrac{h}{a}}{1-\dfrac{h^2}{a^2}} - h.$

$= \dfrac{2ha^2}{a^2-h^2} - h = \dfrac{h(a^2+h^2)}{(a^2-h^2)}.$



படம் 105

பயிற்சி 4. A இடத்திலிருந்து ஒரு மலை உச்சியின் ஏற்றக் கோணம் $\alpha°$. படுக்கைத் தளத்தோடு $\beta°$ சரிவாயிருக்கும் தளத்தில் உச்சியை நோக்கி c அடி நடந்த பிறகு ஏற்றக் கோணம் $\gamma°$. எனின் அம்மலையின் உயரம் $\dfrac{c \sin\alpha \sin(\gamma-\beta)}{\sin(\gamma-\alpha)}$ என்று நிறுவுக.



படம் 106

ABC முக்கோணத்தில்

$$\frac{AC}{\sin ABC} = \frac{AB}{\sin ACB}$$

$$\therefore \quad AC = \frac{c \sin ABC}{\sin ACB}$$

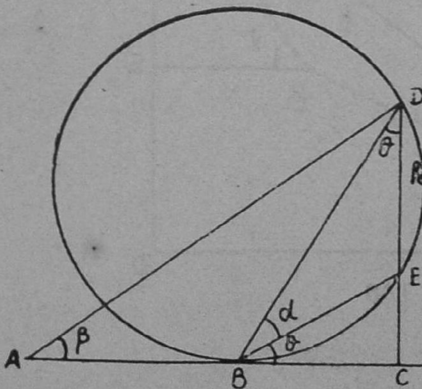
$$\begin{aligned} ACB &= ACD - BCE \\ &= (90^\circ - \alpha) - (90^\circ - \gamma) \\ &= \gamma - \alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ABC &= 180^\circ - ACB - BAC \\ &= 180^\circ - (\gamma - \alpha) - (\alpha - \beta) \\ &= 180^\circ - \gamma + \alpha - \alpha + \beta \\ &= 180^\circ - (\gamma - \beta). \end{aligned}$$

$$\therefore \quad AC = \frac{c \sin(\gamma - \beta)}{\sin(\gamma - \alpha)}.$$

மலையின் உயரம் $= \mathbf{CD} = \mathbf{AC} \sin \alpha = \dfrac{c \sin \alpha \sin(\gamma - \beta)}{\sin(\gamma - \alpha)}.$

பயிற்சி 5. மேடைமீதிருக்கும் ஒரு கொடித்தூண் உச்சியின் எற்றக்கோணம் β ஆக ஒருவன் காணுகிறான். மேடையை நோக்கி a அடி நடந்தபிறகு கொடித் தூண் α என்ற மீப்பெரும் கோணத்தை **(maximum angle)** பிறப்பித்தால் கொடித்தூணின் உயரம் $\dfrac{2a \sin \alpha \sin \beta}{\cos \beta + \sin(\alpha - \beta)}$ என்று நிறுவுக.



படம் 107

CE-ஐ மேடையாகவும், **ED**-ஐ கொடித்தூணாகவும், **A**-ஐ முதலில் இருந்து பார்த்த இடமாகவும், **DE** மீப்பெரும் கோணத்தை உண்டுபண்ணும் இடம் **B** ஆகவும், கொடித்தூணின் உயரத்தை h ஆகவும் கொள்வோம்.

B-யோடு **DE** மீப்பெரும் கோணத்தை உண்டுபண்ணுவதால் **D, E, B** புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் வட்டத்தை **AC**, **B**-யில் தொடும்.

$$\therefore \quad \text{CBE} = \text{BDE} = \theta.$$

$$\text{BEC} = \text{BDE} + \text{DBE}.$$

(அ-து) $90° - \theta = \theta + a..$

$$\therefore \quad 2\theta = 90° - a. \qquad (1)$$

BDE முக்கோணத்தில்

$$\frac{\text{BE}}{\sin \theta} = \frac{\text{DE}}{\sin a}.$$

$$\therefore \quad \text{BE} = \frac{h \sin \theta}{\sin a}. \qquad (2)$$

ACD முக்கோணத்தில்

$$\tan \beta = \frac{\text{CD}}{\text{AC}} = \frac{h + \text{CE}}{a + \text{BC}}.$$

$$= \frac{h + \text{BE} \sin \theta}{a + \text{BE} \cos \theta}.$$

$$= \frac{h + \dfrac{h \sin \theta}{\sin a} \sin \theta}{a + \dfrac{h \sin \theta}{\sin a} \cos \theta}$$ [**BE**-யின் மதிப்பை 2-லிருந்து ஈடாகக் கொடுத்தால்]

$$= \frac{h(\sin a + \sin^2 \theta)}{a \sin a + h \sin \theta \cos \theta}.$$

$$= \frac{h \ \{\sin a + \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)\}}{a \sin a + \dfrac{h}{2} \sin 2\theta}.$$

$$= \frac{h(2 \sin a + 1 - \cos 2\theta)}{2a \sin a + h \sin 2\theta}.$$

$$= \frac{h\,(2 \sin a + 1 - \sin a)}{2a \sin a + h \cos a}.$$ [θ-வின் மதிப்பை 1-லிருந்து ஈடாகக் கொடுத்தால்]

$$\frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{h(\sin a + 1)}{2a \sin a + h \cos a}.$$

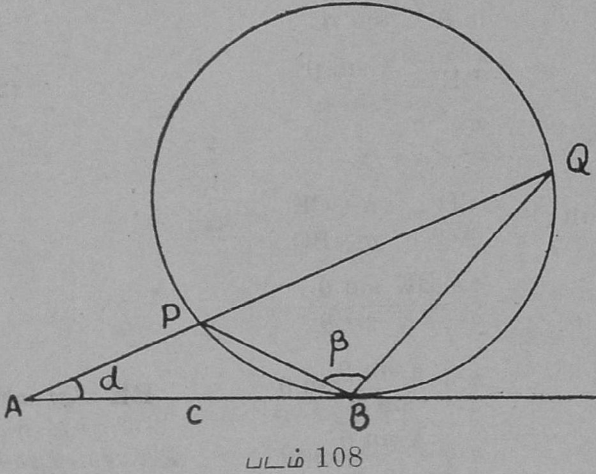
(அ-து) $\sin \beta \ (2a \sin a + h \cos a) = h \cos \beta \ (\sin a + 1).$

(அ-து) $h \ \{(\sin a \cos \beta - \cos a \sin \beta) + \cos \beta\} = 2a \sin a \sin \beta.$

(அ-து) $h \ \{\sin (a + \beta) + \cos \beta\} = 2a \sin a \sin \beta.$

$$\therefore \quad h = \frac{2a \sin a \sin \beta}{\sin (a + \beta) + \cos \beta}.$$

பயிற்சி 6. நேராக ஓடும் ஆற்றின் கரையில் நடக்கும் ஒருவன், இரண்டு இடங்களை இணைக்கும் கோடு ஆற்றோடு $a°$ சாய்வாக இருக்கிற தாகக் காணுகிறான். அவன் c அடி நடந்த பிறகு அவ்விடங்கள் β என்ற மீப்பெருங்கோணத்தை பிறப்பிப்பதாகக்காணுகிறான். அவ்விதமானல் அவ்விரண்டு இடங்களின் இடைப்பட்ட தூரம் $\frac{2c \sin a \sin \beta}{\cos a \cos \beta}$ என்று காட்டுக.



படம் 108

AB-ஐ ஆறாகவும் **P, Q** புள்ளிகளை அவ்விரண்டு இடங்களாகவும் கொள்வோம். **PQ, B**-யோடு மீப்பெரும் கோணத்தை பிறப்பிப்பதால் **P, Q, B** புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் வட்டம் **AB**-ஐ **B**-யில் தொடும்.

$$\therefore \quad ABP = BQP = \theta.$$

மேலும் $ABQ = \theta + \beta.$

$$ABQ + BAQ + AQB = 180°.$$

$$\therefore \quad \theta + \beta + a + \theta = 180°.$$

$$\therefore \quad 2\theta = 180° - (a + \beta).$$

$$\therefore \quad \theta = 90° - \tfrac{1}{2}(a + \beta).$$

$$BPQ = \theta + a = 90° - \tfrac{1}{2}(a + \beta) + a = 90° - \tfrac{1}{2}(\beta + a). \qquad (1)$$

ABQ முக்கோணத்தில்

$$\frac{AB}{\sin AQB} = \frac{AQ}{\sin ABQ} = \frac{BQ}{\sin BAQ}.$$

$$\therefore \quad BQ = \frac{AB \sin BAQ}{\sin AQB} = \frac{c \sin a}{\sin \theta}. \qquad (2)$$

PBQ முக்கோணத்தில்

$$\frac{BQ}{\sin BPQ} = \frac{PQ}{\sin PBQ}.$$

$$\therefore \quad PQ = \frac{BQ \sin PBQ}{\sin BPQ}.$$

$$= \frac{c \sin a}{\sin \theta} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin (a+\theta)}.$$

(2-லிருந்து **BQ**-யின் மதிப்பை ஈடாகக் கொடுத்தால்)

$$= \frac{c \sin a \sin \beta}{\sin \{90^\circ - \frac{1}{2}(a+\beta)\} \sin \{90^\circ - \frac{1}{2}(\beta - a)\}}.$$

$$= \frac{c \sin a \sin \beta}{\cos \frac{1}{2}(a+\beta) \cdot \cos \frac{1}{2}(\beta - a)}.$$

$$= \frac{2c \sin a \sin \beta}{\cos a + \cos \beta}.$$

பயிற்சிகள் 30

1. h அடி உயரமுள்ள ஒரு கட்டிடத்தின்மேலிருந்தும், அடிப்பாகத்திலிருந்தும் ஒரு மேடை உச்சியின் ஏற்றக்கோணங்கள் முறையே a, β ஆகும். அவ்விதமானல் மேடையின் உயரமென்ன? $h = 250$, $a = 50^\circ$, $\beta = 75^\circ$ ஆக யிருப்பின் அதன் உயரத்தைக் காணுக.

2. ஒரு தூண் உச்சியின் ஏற்றக்கோணம் θ ஆகவும், பார்க்கும் இடத்திலிருந்து h அடிக்குக் கீழிருக்கும் குளத்தில் தெரியும் அதனுடைய நிழலின் இறக்கக்கோணம் Φ ஆகவும் இருக்கின்றன. அத்தூணின் உயரம் குளம் நிரப்பிலிருந்து x அடியானல் $x = \dfrac{h \sin (\Phi + \theta)}{\sin (\Phi - \theta)}$ என்று நிறுவுக.

3. ஒரு ஆகாயவிமானத்திலிருந்து h அடி உயரமுள்ள ஒரு மேடை உச்சி, மேடை அடிப்பாகம் இவற்றின் இறக்கக்கோணங்கள் முறையே a, β என்று தோன்றுமானல் ஆகாய விமானம் எவ்வளவு உயரத்தில் பறக்கிறது? $h = 200$, $a = 60^\circ$, $\beta = 70^\circ$ ஆகவிருப்பின் அந்த உயரத்தை கணக்கிடுக.

4. h அடி உயரமுள்ள மேடை உச்சியிலிருந்து படுக்கைத்தளத்தில், அம்மேடையின் அடிப்பாகம் வழியாகச் செல்லும் ஒரு கோட்டி லிருக்கும் இரண்டு பொருள்களின் இறக்கக்கோணங்கள் $45° - \mathbf{A}$, $45° + \mathbf{A}$ ஆகும். அவ்விரண்டு பொருள்களின் இடைப்பட்ட தொலை $2h \tan 2\mathbf{A}$ என்று நிறுவுக.

5. ஒருவன் ஒரு மேடையின் ஏற்றக்கோணம் $\mathbf{A}$ ஆகக் காணுகிறான். மேடையின் நேராக a அடி நடந்த பிறகு ஏற்றக்கோணம் $45°$ ஆகவும், அதற்குப் பிற்பாடு b அடி நடந்த பிறகு $90° - \mathbf{A}$ ஆகவும் காணுகிறான். மேடையின் உயரமென்ன?

6. ஒரு கோபுரத்தின் அடிப்பாகம் வழியாகச் செல்லும் ஒரு கோட்டி லிருக்கும் **A, B, C** மூன்று இடங்களிலிருந்து, கோபுர உச்சி பார்க்கப்படுகிறது. **B, C** இடங்களிலிருந்துள்ள ஏற்றக்கோணங் கள் **A**-விருந்துள்ள ஏற்றக்கோணத்தை விட முறையே இரண்டு, மூன்று மடங்குகளாக இருக்கின்றன. $\mathbf{AB} = a$, $\mathbf{BC} = b$ என் றிருப்பின் கோபுரத்தின் உயரம் $\frac{a}{2b}\sqrt{(a+b)(3b-a)}$ என்று காட்டுக.

A-யிலிருந்துள்ள ஏற்றக்கோணத்தின் இருக்கை $\frac{1}{3}$ என்றால் $5a = 13b$ என்று நிறுவுக.

7. 54 அடி உயரமுள்ள ஒரு கலங்கரை விளக்கு, ஒரு குன்றின்மேல் இருக்கிறது. கடலில் நங்கூரமிட்டிருக்கும் கப்பலிலிருந்து கலங் கரை விளக்கின் உச்சி, குன்றின் உச்சி இவற்றின் ஏற்றக்கோணங் கள் முறையே $4° 52'$, $4° 2'$ ஆயின் குன்றின் உயரமும், குன்றி லிருந்து கப்பலுடைய தொலையும் காண்க.

8. h அடி உயரமுள்ள ஒரு தூணின் அடிப்பாகத்திலிருந்து தூபி ஒன்றின் ஏற்றக்கோணம் $5\,a$. அத்தூணின் உச்சியிலிருந்து பார்க்கும்போது ஏற்றக்கோணம் $4\,a$ ஆக மாறுமாயின் அந்த தூபியின் உயரமும், தூணிலிருந்து அதன் தொலையும் முறையே $\frac{h \cos 4a \sin 5a}{\sin a}$, $\frac{h \cos 4a \cos 5a}{\sin a}$ என்று நிறுவுக.

$h = 20$, $a = 8°$ என்றிருப்பின் தூபியின் உயரமும், தூணி லிருந்து அதன் தொலையும் காண்க.

9. ஒரு மேடை, படுக்கைத் தளத்திலிருக்கும் ஒரு புள்ளியோடு a கோணத்தை பிறப்பிக்கிறது. அப்புள்ளிக்கு நேரே h அடி உயரத்திலிருக்கும் வேறொரு புள்ளியிலிருந்து மேடையின் அடிப் பாகத்தின் இறக்கக்கோணம் β ஆகும். அந்த மேடையின் உயர மென்ன ?

10. 60 அடி உயரமுள்ள ஒரு விளக்குத்தூண் A, B இரண்டு புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் கோட்டிலிருக்கிறது. அத்தூணின் ஏற்றக் கோணங்கள் முறையே $55^\circ\ 30'$, $23^\circ\ 23'$ என்றிருப்பின் AB-யின் நீளமென்ன ?

11. A, B இரண்டு பொருள்களின் திசைக்கோணங்கள் முறையே நேர் வடக்காகவும் வ. 13° மே. ஆகவும் ஒருவன் காணுகிறான். வட மேற்காக ஒரு மைல் நடந்த பிறகு அந்த பொருள்களின் திசைக் கோணங்கள் முறையே வடகிழக்காகவும், நேர்கிழக்காகவும் இருக் கின்றன. அப்பொருள்களின் இடையிட்ட தூரமென்ன ?

12. ஒரு ஆகாய விமானத்திலிருந்து இரண்டு மைல் குற்றிகளின் இறக் கக்கோணங்கள் முறையே $57^\circ\ 39'$, $17^\circ\ 42'$ ஆயின் ஆகாய விமானத்தின் உயரமென்ன ?

13. கடலோரத்திலிருக்கும் 200 அடி உயரமுள்ள ஒரு குன்றின் மேலிருந்து பார்க்கும் ஒருவன், ஒரு படகின் இறக்கக்கோணங்கள் ஒரு நிமிடத்தில் 62°-யிலிருந்து 26°-யாக மாறுவதைக் கண்டால் படகின் வேகமென்ன ?

14. நீர் மட்டத்திலிருந்து 15 அடி உயரத்தில் நிற்கும் ஒருவன், ஒரு ஆகாய விமானத்தின் ஏற்றக்கோணம் $59^\circ\ 16'$ ஆகவும், தண்ணீ ரில் அதன் நிழலுடைய இறக்கக் கோணம் $60^\circ\ 42'$ ஆகவும் காணுகிறான். ஆகாய விமானம் எவ்வளவு உயரத்தில் பறக்கிறது ?

15. கடலோரத்திலிருக்கும் குன்றின் உச்சியிலிருந்து பார்க்கும் ஒருவன், கடலில் 1500 அடிக்கு அப்பால் நங்கூரமிட்டிருக்கும் கப்பலின் உச்சியில் தெரியும் விளக்கின் ஏற்றக்கோணம் a ஆகவும், தண்ணீரில் தெரியும் அதன் படிவத்தின் இறக்கக்கோணம் β ஆகவும் கண்டால் குன்றின் உயரம் $750\ (\tan a + \tan \beta)$ அடி என்று நிறுவுக.

16. வடபக்கம் சரிவாயிருக்கும் ஒரு தூணின் அடிப்பாகத்திலிருந்து நேர் தெற்காக a, b அடிக்கு அப்பால் இரண்டு இடங்களிலிருந்து தூண் உச்சியின் ஏற்றக்கோணங்கள் α, β ஆகும். தூண் படுக்கைத் தளத்தோடு $\cot^{-1}\left[\frac{b \cot \alpha - a \cot \beta}{b-a}\right]$ சாய்ந்திருக்கிறதென நிறுவுக.

17. ஒரு மேடையும், அதன்மேலுள்ள a அடி உயரமுள்ள ஒரு கொடித் தூணும் படுக்கைத் தளத்திலிருக்கும் ஒரு புள்ளியோடு முறையே α, β கோணங்களைப் பிறப்பித்தால் மேடையின் உயரம் $\frac{a \sin \alpha \cos (\alpha+\beta)}{\sin \beta}$ என்று நிறுவுக.

18. ஒரு சுவரும், அதன்மேல் நாட்டியிருக்கும் கொடித்தூணும் படுக்கைத் தளத்திலிருக்கும் ஒரு இடத்தில் முறையே α, β கோணங்களைப் பிறப்பிப்பதாக ஒருவன் காணுகிருன். அவன் சுவரின் நேராக a அடி நடந்தபிறகு கொடித்தூண் β கோணத்தைப் பிறப்பிப்பதாகக் காணுகிருன். கொடித்தூணின் உயரமும், சுவரின் உயரமும் காணுக.

19. மேடையின்மேலிருக்கும் ஒரு கொடித்தூண் படுக்கைத்தளத்திலிருக்கும் A, B இரண்டு இடங்களோடு ஒரே கோணத்தைப் பிறப்பிக்கிறது. A, B-லிருந்து கொடித்தூணின் ஏற்றக் கோணங்கள் முறையே α, β ஆகும். $AB = a$ என்றிருப்பின் கொடித்தூணின் உயரம் $\frac{a \sin (\alpha+\beta-90^\circ)}{\sin (\alpha-\beta)}$ என்று காட்டுக.

20. ஒருவன் ஒரு கோபுரத்தின் ஏற்றக்கோணம் θ ஆக காணுகிருன். கோபுரத்தின் நேராக a அடி நடந்த பிறகு ஏற்றக்கோணம் $90^\circ - \theta$ ஆகவும், அதற்கு அப்பால் b அடி நடந்த பிறகு 2θ ஆகவும் இருப்பின் $\cos 2\theta = \frac{a}{2(a+b)}$ என்று நிறுவுக.

21. ஒரு தூணின்மேலிருக்கும் ஒரு சிலை, படுக்கைத்தளத்திலிருக்கும் ஒரு புள்ளியோடு α மீப்பெரும் கோணத்தைப் பிறப்பிக்கிறது. அந்த சிலை, தூண் இவற்றின் உயரங்களின் விகிதம் k என்றிருப்பின் $k = \frac{2 \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}$ என்று நிறுவுக.

22. ஒரு குன்றின் எற்றக்கோணம் 47°. படுக்கைத்தளத்தோடு 32° சாய்ந்திருக்கும் தளத்தில் 500 அடி மேல் நோக்கிச் சென்ற பிறகு அதன் எற்றக்கோணம் 77°. குன்றின் உயரமென்ன?

23. படுக்கைத் தளத்திலிருக்கும் ஒரு இடத்திலிருந்து ஒரு குன்றின் எற்றக்கோணம் 45°. படுக்கைத் தளத்தோடு 15° அடி சாய்ந் திருக்கும் தளத்தில் 500 அடி உச்சி நோக்கி நடந்த பிறகு அதன் எற்றக்கோணம் 75°. குன்றின் உயரமென்ன?

24. ஒரு சாய்வு தளத்தில் **c** அடி நடந்த பிறகு, அத்தளத்தின் அடிப் பாகம் வழியாகச் செல்லும் படுக்கைத் தளத்தில் இருக்கும் ஒரு பொருளின் இறக்கக்கோணம் a ஆகக் காணுகிறான். மேலும் **c** அடி நடந்த பிறகு, அப்பொருளின் இறக்கக்கோணம் β ஆக மாறுகிறது. அந்த சாய்வுத் தளத்தின் சாய்வு கோணம் θ ஆக இருப்பின் $\cot\theta = 2\cot\beta - \cot a$ என்று நிறுவுக.

134. பல தளங்களில் எடுக்கும் அளவுகளைக்கொண்ட கணக்கு களைப் போடுவதற்கும், அவற்றை நன்றாகப் புரிவதற்கும் திண்ம வடிவ கணிதம் (**solid geometry**) நன்றாகத் தெரியவேண்டும். பல தளங்களி லுள்ள கோடுகளையும் கோணங்களையும் ஒரே படத்தில் வரைவதற்குக் கற்பனை இன்றியமையாதது.

பல தளங்களில் எடுக்கும் அளவுகளைக்கொண்ட கணக்குகள்

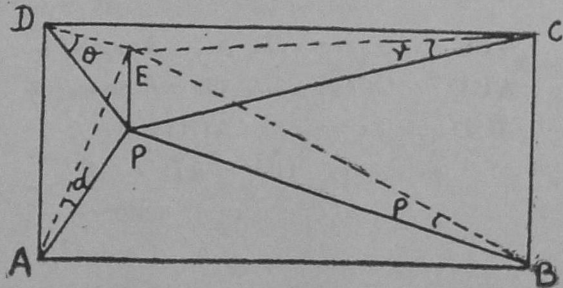
பயிற்சி 7. **ABCD** என்ற நீண்ட சதுர தோட்டத்தினுள் ஒரு செங்குத்தான கொடித்தூண் நிற்கிறது. **A, B, C, D**-விருந்து அத் தூண் உச்சியினது எற்றக் கோணங்கள் a, β, γ, θ எனின் $\cot\theta = (\cot^2 a - \cot^2\beta + \cot^2\gamma)^{\frac{1}{2}}$ என்று நிறுவுக.

PE-ஐ கொடித்தூண் என்று கொள்வோம்.

APE முக்கோணத்தில்

$$\tan a = \frac{PE}{AP}$$

$\therefore AP = PE \cot a.$



படம் 109

இவ்வாறே $PB = PE \cot \beta$

$PC = PE \cot \gamma$

$PD = PE \cot \theta$

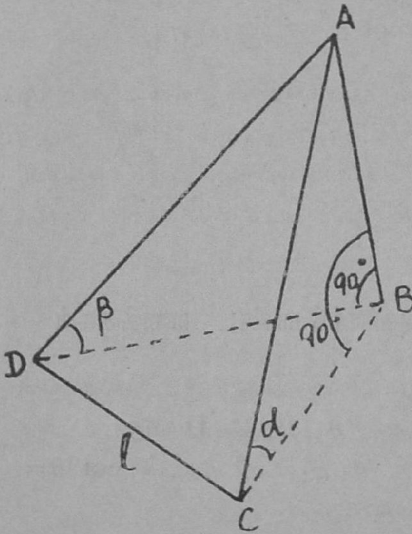
மேலும் $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$ என்று எளிதிற் காணலாம்.

$\therefore \quad PE^2 \cot^2 a + PE^2 \cot^2 \gamma = PE^2 \cot^2 \beta + PE^2 \cot^2 \theta.$

$\therefore \quad \cot^2\theta = \cot^2 a - \cot^2\beta + \cot^2\gamma.$

$\therefore \quad \cot\theta = (\cot^2 a - \cot^2\beta + \cot^2\gamma)^{\frac{1}{2}}$

பயிற்சி 8. படுக்கைத் தளத்தில் h அடி உயரமுள்ள ஒரு கோபுரம் நிற்கிறது. அதற்கு நேரே தெற்கில் நிற்கும் ஒருவன் அதன் உச்சியின் ஏற்றக் கோணத்தை a° ஆகக் காணுகிறான். அவன் அந்த இடத்திலிருந்து நேரே மேற்கே h அடி நடந்த பிறகு அதன் ஏற்றக் கோணம் β° ஆக கண்டால் $l^2 = h^2 (\cot^2\beta - \cot^2 a)$ என்று நிறுவுக.



படம் 110

AB-ஐ கோபுரமாகவும் **C**-ஐ முதலில் இருந்து பார்க்கும் இடமாகவும், **D**-ஐ இரண்டாவது இடமாகவும் கொள்வோம்.

C இடத்திலிருந்து **D** நேரே மேற்கே இருப்பதால் **CD** கோடு **ABC** என்ற செங்குத்தான தளத்திற்கு, குத்துக்கோடாக இருக்கிறது.

ஆகவே $ACD = 90^\circ$.

ABC முக்கோணத்தில் $AC = h \operatorname{cosec} a$.

ABD முக்கோணத்தில் $AD = h \operatorname{cosec} \beta$.

ACD முக்கோணத்தில் $ACD = 90^\circ$.

ஆகையால் $CD^2 = AD^2 - AC^2$

(அ-து) $l^2 = h^2 \operatorname{cosec}^2\beta - h^2 \operatorname{cosec}^2 a$

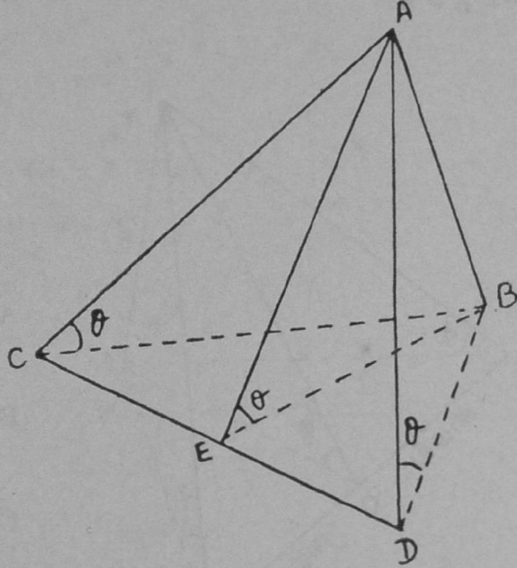
$= h^2 (1 + \cot^2\beta - 1 - \cot^2 a)$

$= h^2 (\cot^2\beta - \cot^2 a)$

பயிற்சி 9. $2a$ இடைப்பட்ட இரண்டு இடங்களிலிருந்து ஒரு மேடை உச்சியின் ஏற்றக்கோணங்கள் θ ஆகும். அவ்விரண்டு இடங்களின் நடு மத்தியிலிருந்துள்ள இடத்திலிருந்து ஏற்றக்கோணம் Φ ஆனல் மேடையின் உயரம் $\dfrac{a \sin \Phi \sin \theta}{\sqrt{\sin (\Phi+\theta) \sin (\Phi-\theta)}}$ என்று நிறுவுக.

C, D என்பவற்றை அவ்விரண்டு இடங்களாகவும் **AB**-ஐ மேடையாகவும் கொள்வோம்.

அப்பொழுது $\triangle$ **ABD**, $\triangle$ **ABE**, $\triangle$ **ACE** முக்கோணங்கள் வெவ்வேறு தளங்களிலிருக்கும் செங்கோண முக்கோணங்களாகும்.



படம் 111

$ACB = ADB = \theta$; $AEB = \Phi$.

ABD முக்கோணத்தில் $AD = AB \operatorname{cosec} \theta$.

ACB ,, $AC = AB \operatorname{cosec} \theta$.

$\triangle$ **ABE** ,, $AE = AB \operatorname{cosec} \Phi$.

$\therefore$ **ACD** முக்கோணத்தில் **AC**-யும், **AD**-யும் சமமாக இருக்கும்.

CD-யின் நடுப்புள்ளி **E** ஆதலால் $AEC = 90°$.

$$\therefore \quad AC^2 = AE^2 + CE^2.$$

(அ-து) $AB^2 \operatorname{cosec}^2\theta = AB^2 \operatorname{cosec}^2 \Phi + a^2$

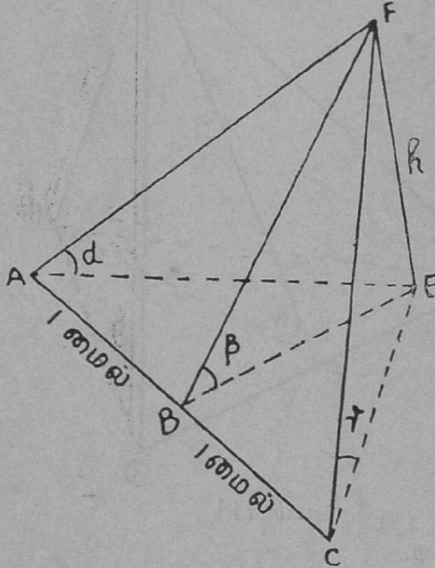
$$\therefore \quad AB^2 = \frac{a^2}{\operatorname{cosec}^2\theta - \operatorname{cosec}^2\Phi}.$$

$$= \frac{a^2 \sin^2\theta \sin^2\Phi}{\sin^2\Phi - \sin^2\theta}.$$

$$= \frac{a^2\sin^2\theta \sin^2\Phi}{\sin (\Phi+\theta) \sin (\Phi-\theta)}.$$

$$AB = \frac{a \sin \theta \sin \Phi}{\sqrt{\sin (\Phi+\theta) \sin(\Phi-\theta)}}.$$

பயிற்சி 10. ஒரு குன்றின் உச்சியிலிருந்து நிரப்புடைய நேரான பாதையிலிருக்கும் மூன்று மைல் குற்றிகளின் இறக்கக் கோணங்கள் முறையே a, β, γ ஆயின் குன்றின் உயரம் $\frac{5280\sqrt{2}}{(\cot^2 a - 2\cot^2\beta + \cot^2\gamma)^{\frac{1}{2}}}$ என்று நிறுவுக.



படம் 112

A, B, C புள்ளிகள் மைல்குற்றிகளாகவும், EF குன்றாகவும் கொள்வோம்.

குன்றின் உயரத்தை h மைல் என்று கொண்டால்

AEF முக்கோணத்தில்

$AE = h \cot a.$

BEF முக்கோணத்தில்

$BE = h \cot \beta.$

CEF முக்கோணத்தில்

$CE = h \cot \gamma.$

AEC முக்கோணத்தில்

EB நடுக்கோடாகும்.

ஆகவே $AE^2 + CE^2 = 2BE^2 + 2AB^2.$

(அ-து) $h^2 \cot^2 a + h^2 \cot^2\gamma = 2h^2 \cot^2\beta + 2.$

(அ-து) $h^2 (\cot^2 a - 2\cot^2\beta + \cot^2\gamma) = 2.$

$$\therefore \quad h^2 = \frac{2}{\cot^2 a - 2\cot^2\beta + \cot^2\gamma} \text{ மைல்.}$$

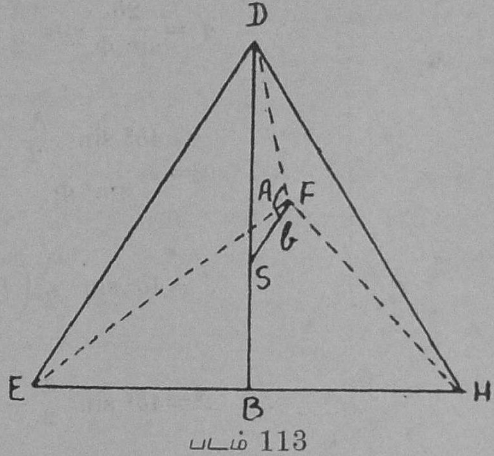
$$\therefore \quad h = \frac{\sqrt{2}}{(\cot^2 a - 2\cot^2\beta + \cot^2\gamma)^{\frac{1}{2}}} \text{ மைல்.}$$

$$= \frac{5280\sqrt{2}}{(\cot^2 a - 2\cot^2\beta + \cot^2\gamma)^{\frac{1}{2}}} \text{ அடி.}$$

பயிற்சி 11. ஒரு சம பக்க முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்ட மையத்தில், b அடியுள்ள ஒரு கொடித்தூண் நாட்டியிருக்கிறது. கொடித்தூண் உச்சியோடு a அடி நீளமுள்ள முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் **A** கோணத்தை உண்டுபண்ணுமானால் $6b^2 = \dfrac{a^2(1+2\cos A)}{1-\cos A}$ என்று நிறுவுக.

SF-ஐ கொடித்தூணைக் கொள்வோம்.

DEH சம பக்க முக்கோணமாதலால் சுற்றுவட்டமையமும் நடுக்கோட்டுமையமும் ஒரே புள்ளியாக இருக்கும்.



படம் 113

$$\therefore \quad DS = \tfrac{2}{3}\, DB.$$

$$= \tfrac{2}{3}\sqrt{\left(a^2 - \frac{a^2}{4}\right)} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

FDS $= \Phi$ என்றுகொண்டால் $\tan\Phi = \dfrac{SF}{DS} = \dfrac{b}{\dfrac{a}{\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt{3}b}{a}$

DEF முக்கோணத்தில் DFE $=$ A என்றிருப்பதால்

$$DEF = 90^\circ - \frac{A}{2}.$$

$$\therefore \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{DF}{\sin\left(90^\circ - \dfrac{A}{2}\right)}.$$

$$\therefore \quad a = \frac{DF \sin A}{\sin\left(90^\circ - \dfrac{A}{2}\right)} = 2\, DF \sin\frac{A}{2}.$$

DSF முக்கோணத்தில் $\sin\Phi = \dfrac{SF}{DF}$

$$\therefore \quad DF = \frac{SF}{\sin\Phi} = \frac{b}{\sin\Phi}.$$

$$\therefore \quad a = \frac{2b}{\sin\Phi}\sin\frac{A}{2}.$$

$$\therefore \quad a^2 = \frac{4b^2\sin^2\dfrac{A}{2}}{\sin^2\Phi} = 4b^2\sin^2\frac{A}{2}(1+\cot^2\Phi).$$

$$= 4b^2\sin^2\frac{A}{2}\left(1+\frac{a^2}{3b^2}\right)$$

$$\therefore \quad a^2 = 4b^2\sin^2\frac{A}{2} + \tfrac{4}{3}a^2\sin^2\frac{A}{2}$$

(அ-து) $$a^2\left(1-\tfrac{4}{3}\sin^2\frac{A}{2}\right) = 4b^2\sin^2\frac{A}{2}$$

$$\therefore \quad b^2 = \frac{a^2\left(1-\tfrac{4}{3}\sin^2\dfrac{A}{2}\right)}{4\sin^2\dfrac{A}{2}}$$

$$= \frac{a^2\{1-\tfrac{2}{3}(1-\cos A)\}}{2(1-\cos A)}$$

$$= \frac{a^2(\tfrac{1}{3}+\tfrac{2}{3}\cos A)}{2(1-\cos A)}$$

$$= \frac{a^2(1+2\cos A)}{6(1-\cos A)}$$

$$\therefore \quad 6b^2 = \frac{a^2(1+2\cos A)}{1-\cos A}$$

பயிற்சிகள் 31

1. **A, B** என்பவை a அடி உயரமுள்ள ஒரு மேடையின் அடிப்பாகமும் உச்சியுமாகும். படுக்கைத்தளத்தில் b அடிகள் இடைப்பட்ட **C, D** என்ற இரண்டு இடங்கள் இருக்கின்றன. **C**-லிருந்து மேடை உச்சியின் ஏற்றக் கோணம் x ஆகவும், கோணங்கள் **BCD, BDC** என்பவை முறையே y, z ஆகவும் இருப்பின் $a \sin (y+z)=b \sin x \sin z$ என்று நிறுவுக.

2. படுக்கைத் தளத்தில் ஒரு மேடையின் அடிப்பாகத்திலிருந்து a, b அடிகளுக்கு அப்பாலுள்ள இரண்டு இடங்களிலிருந்து அம்மேடை உச்சியின் ஏற்றக்கோணங்கள் நிரப்பும் கோணங்களாக இருக்கின்றன. அவ்விரண்டு இடங்களை இணைக்கும் கோடு மேடையின் அடிப்பாகம் வழிச் செல்லுமானுல், மேடையின் உயரம் $\sqrt{ab}$ என்று காட்டுக.

3. இரண்டு தூண்களின் உயரங்கள் a, b ஆகும். அவற்றின் அடிப்பாகங்கள் வழியாகச் செல்லும் கோட்டிலுள்ள ஒரு புள்ளியில் அத்தூண்கள் இரண்டும் a கோணத்தையும், படுக்கைத்தளத்திலிருக்கும் வேருெரு புள்ளியோடு β, γ கோணங்களையும் பிறப்பிக்கின்றன. இரண்டாவது புள்ளியோடு தூண்களின் அடிப்பாகம் வழிச் செல்லும் கோடு ஒரு செங்கோணத்தை பிறப்பித்தால் $(a+b)^2 \cot^2 a=a^2 \cot^2\beta+b^2 \cot^2\gamma$ என்று நிறுவுக.

4. h அடி உயரமுள்ள மலை உச்சியின் ஏற்றக்கோணங்கள் படுக்கைத் தளத்திலிருக்கும் **A, B, C** இடங்களிலிருந்து முறையே a, a, β ஆக இருப்பின் அதன் உயரத்தை

   $\{h^2 (\cot^2\beta-\cot^2 a)-ab \cot \mathrm{C}\}^2= b^2 \sin^2 \mathrm{A}\,(4h^2 \cot^2 a-c^2)$

   கோவையிலிருந்து காணலாம் என்று நிறுவுக.

5. ஒரு மைல் இடைப்பட்ட இரண்டு இடங்களிலிருந்தும், அந்த இடங்களை இணைக்கும் கோட்டின் நடுவிலிருந்தும் ஒரு ஆகாய விமானத்தின் ஏற்றக்கோணங்கள் முறையே 60°, 30°, 45° ஆயின் ஆகாய விமானம் எவ்வளவு உயரத்தில்பறக்கிறது?

6. ஒரு மேடைக்கு நேரே தெற்கு நின்று பார்க்கும்போது அம் மேடையின் எற்றக்கோணம் 54° $16'$ ஆகவும், அவ்விடத்தி லிருந்து நேர் கிழக்கே 100 அடி நடந்தபிறகு 50° $8'$ ஆகவும் ஒருவன் காணுகிறான். மேடையின் உயரமென்ன?

7. ஒரு தூபியின் எற்றக்கோணங்கள் அதற்கு நேரே தெற்கிலிருந்து பார்க்கும்போது 45° ஆகவும், அவ்விடத்திலிருந்து நேரே மேற்கே a அடிக்கு அப்பாலுள்ள இடத்திலிருந்து பார்க்கும்போது 15° ஆகவும் இருக்கின்றன. அவ்விதமாயின் தூபியின் உயரம் $\dfrac{a(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt[4]{3}}$ என்று காட்டுக.

8. ஒரு கோபுரத்தின் நேரே தெற்கிலிருக்கும் **A** என்ற இடத்தி லிருந்து 30°-ம், **A**-லிருந்து நேர்மேற்கே a அடிக்கு அப்பாலுள்ள **B** என்ற இடத்திலிருந்து 18°-ம் அக்கோபுரத்தின் எற்றக் கோணங்களாயின் கோபுரத்தின் உயரம் $\dfrac{a}{\sqrt{2+2\sqrt{5}}}$ என்று காட்டுக.

9. ஒரே உயரத்தில் ஒரே வேகத்தோடு பறக்கும் ஒரு ஆகாய விமானம் ஒரு இடத்தின் நேர்கிழக்கே θ எற்றக்கோணத்திலும், 10 நிமிடங் களுக்குப் பிறகு அதே இடத்தின் நேர்வடக்கே ϕ கோணத்திலும் காணப்படுமாயின் அது $\dfrac{10 \cot \phi}{\cot \theta - \cot \phi}$ நிமிடங்களுக்குப் பிறகு வடமேற்குத் திசையில் இருக்குமென நிறுவுக.

10. **A** இடத்திலிருந்து ஒரு ஆகாய விமானத்தின் எற்றக்கோணம் 40° ஆகவும், திசைக்கோணம் வ. 60° மே. ஆகவும், அதே வேளையில் **A**-க்கு நேரே 5 மைலுக்குத் தெற்கே இருக்கும் **B** இடத்திலிருந்து விமானத்தின் திசைக்கோணம் தெ. 20° மே. ஆகவும் இருப்பின் விமானத்தின் உயரமென்ன?

11. **ABCD** வட்ட வடிவுடைய தடாகத்தின் கரையில் ஒரு கோபுரம் இருக்கிறது. அக்கோபுரத்தின் அடிப்பாகம் **D**. **A, B, C** என்பவற்றிலிருந்து கோபுர உச்சியின் எற்றக்கோணங்கள் α, β, γ ஆகவும் **BCA, BAC** கோணங்கள் ஒவ்வொன்றும் θ ஆகவுமிருப்பின் $\cot \alpha + \cot \gamma = 2 \cot \beta \cos \theta$ என்று நிறுவுக.

12. ஒரு கோபுரத்தின் எற்றக்கோணங்கள் அதற்கு நேரே தெற்கில் இருக்கும் **A** இடத்திலிருந்து $45^\circ+\theta$-வும், **A**-க்கு நேர் கிழக்கே a அடிக்கு அப்பாலுள்ள **B** இடத்திலிருந்து $45^\circ-\theta$-வும் ஆகும். அவ்விதமானல் கோபுரத்தின் உயரம் $\frac{1}{2}a \cos 2\theta\sqrt{\operatorname{cosec} 2\theta}$ என்று நிறுவுக.

13. ஒரு தூணின் அடிப்பாகம் **P**. படுக்கைத்தளத்தில் **A, B** என்று இரண்டு இடங்கள் இருக்கின்றன. **A**-யோடு **BP**, θ கோணத்தையும், **B**-வோடு **AP**, Φ கோணத்தையும், **A**-வோடு தூண் a கோணத்தையும் பிறப்பிக்கின்றன. $AB=a$ என்றிருப்பின் தூணின் உயரம் $\dfrac{a \tan a \sin \Phi}{\sin(\theta+\Phi)}$ என்று நிறுவுக.

14. 50 அடி உயரமுள்ள ஒரு கொடித்தூண் ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் நடுவிலிருக்கிறது. கொடித்தூண் உச்சியோடு பக்கங்கள் 60° பிறப்பிக்குமானல் பக்கங்களின் நீளம் $25\sqrt{6}$ என்று காட்டுக.

15. படுக்கைத்தளத்திலிருக்கும் **A, B, C** மூன்று இடங்களிலிருந்து, ஒரு கோபுர உச்சியின் எற்றக்கோணங்கள் a ஆகும். அவ்விதமானல் கோபுரத்தின் உயரம் $\dfrac{a}{2}\tan a \operatorname{cosec} A$ என்று நிறுவுக.

16. கலங்கரை விளக்கு உச்சியிலிருந்து கடலில் நங்கூரமிட்டிருக்கும் a அடி இடைப்பட்ட இரண்டு கப்பல்களின் இறக்கக்கோணங்கள் a, β ஆகும். அந்த கப்பல்களை இணைக்கும் கோடு கலங்கரை விளக்கு உச்சியோடு பிறப்பிக்கும் கோணம் θ ஆயின் விளக்கின் உயரம் $\dfrac{a \sin a \sin \beta}{(\sin^2 a+\sin^2\beta-2\sin a \sin\beta\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}$ என்று நிறுவுக.

17. **C** இடத்தில் ஒரு கொடித்தூண் நிற்கிறது. படுக்கைத்தளத்திலிருக்கும் **AB** கோடு கொடித்தூண் அடிப்பாகத்தோடு ஒரு செங்கோணம் பிறப்பிக்கிறது. **AB**-யின் நடுப்புள்ளி **M** ஆகும். **AM, B**-லிருந்து கொடித்தூண் உச்சியின் எற்றக்கோணங்கள் முறையே a, γ, β என்றால் $\tan^2\gamma = 2\tan a \tan\beta \sin 2A$ என்று நிறுவுக.

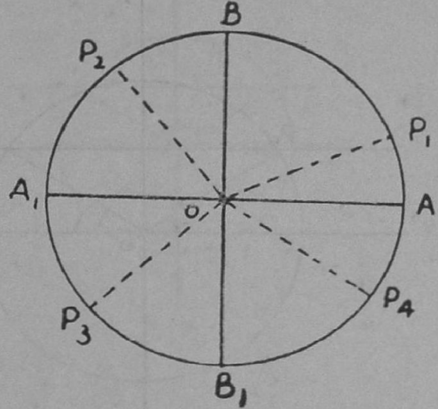
18. படுக்கைத்தளத்தில் நிற்கும் ஒரு கோபுரத்தின் மேற்பாகம் ஒரு சம சதுரமாகும். ஒவ்வொரு பக்கத்தின் நீளம் 20 அடி. படுக்கைத்தளத்தில் நிற்கும் ஒருவன், அவனுக்கு காணுகின்ற மூன்று முக்குகளின் ஏற்றக்கோணங்கள் முறையே $45°$, $60°$, $45°$ ஆகக் காணுகிறான். தரை மட்டத்திலிருந்து அவனது கண் வரையுள்ள உயரம் 5 அடி ஆனால் கோபுரத்தின் உயரம் $5(1+\sqrt{6}+\sqrt{30})$ அடி என்று காட்டுக.

19. இரண்டு கொடித்தூணின் இடையில் நிற்கும் ஒருவன், அவற்றின் உச்சியின் ஏற்றக்கோணங்களை a ஆக காணுகிறான். கொடித் தூண்களின் அடிப்பாகங்களை இணைக்கும் கோட்டோடு $60°$ பிறப்பிக்கும் திசையில் a அடி நடந்த பிறகு அவற்றின் ஏற்றக் கோணங்களை β ஆக காணுகிறான். அவ்விதமானால் தூண்களின் உயரங்கள் $a\dfrac{(4\cot^2\beta-3\cot^2 a)^{\frac{1}{2}}\pm\cot a}{2(\cot^2\beta-\cot^2 a)}$ என்று நிறுவுக.

அதிகாரம் 12

சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் (solutions of equations)

135. ஒரு சுற்றுங்கோடு எவ்விதம் ஒரு கோணத்தைப் பிறப்பிக்கிறது என்று பார்த்தோம். **OP** சுற்றுங்கோடு **OA**-விருந்து புறப்பட்டு மறுபடியும் **OA**-வோடு ஒன்றுபடுகிறது எனக் கொள்வோம். அப்பொழுது நாம் அறிவது சுற்றுங்கோடு ஒரு தடவையோ, இரண்டு தடவையோ, ...முழுச் சுற்றுகள் வலப்பக்கமாகவோ அல்லது இடப்பக்கமாகவோ சுற்றியிருக்கிறது என்பது மட்டுமே. சுற்றுங்கோடு ஒரு முழுச் சுற்று சுற்றினபிறகு சுற்றின கோணம் 2π ஆரயன்களாகும். ஆகவே **OP**, **OA**-வோடு ஒன்றுபடும்போது சுற்றின கோணம் வலப்பக்கமாகவோ அல்லது இடப்பக்கமாகவோ 0, 1, 2, 3...........மடங்கு 2π ஆரயன்களாக இருக்கும்; அஃதாவது $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \ldots\ldots$ ஆரயன்களில் ஏதாவது ஒன்றாக இருக்கும். **n ஒரு முழு எண்ணாக இருப்பின் சுற்றின கோணம் $2n\pi$ ஆரயன்கள் அல்லது $n \times 360°$ என்று சொல்லப்படும்.**



படம் 114

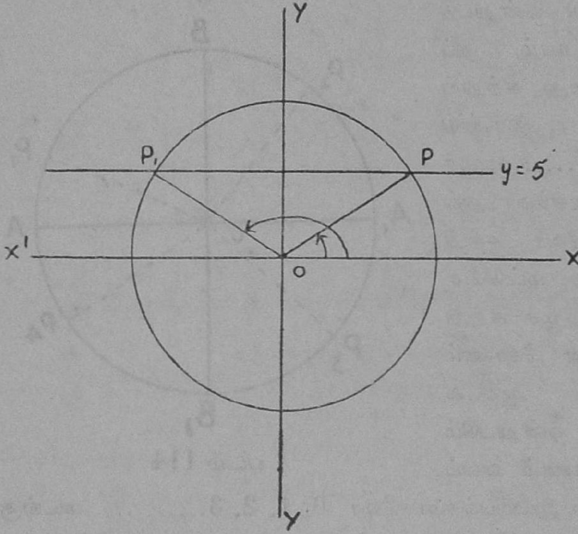
136. $\frac{\pi}{6}, \pi - \frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{\pi}{6}, 3\pi - \frac{\pi}{6}, 4\pi + \frac{\pi}{6}, 5\pi - \frac{\pi}{6}$.

இம்மதிப்புகளில் ஏதாவது ஒன்றாக θ இருக்குமானால் $\sin\theta = \frac{1}{2}$. இதனால் கணக்கிடமுடியாத கோணங்களின் நெடுக்கைகள் ஒரே தொகையாக இருக்கின்றன என்று அறிகிறோம். தலைமாற்றி உரைக்கின் குறித்த தொகையை நெடுக்கையாகக் கொண்ட கோணங்கள் எண்ணற்றவை. மேற்கூறியவை எல்லாக் கோணகணிதத்தகவுகளுக்கும் பொருந்தும். ஆகவே ஒரு கோணத்தின் ஏதாவது ஒரு கோணகணிதத் தகவின் மதிப்புத் தெரியுமானால் கோணத்தின் அளவு எது என்று நிச்சயமாகக் கூற இயலாது. ஆனால் குறித்த மதிப்பை நெடுக்கையாகவோ, அல்லது கிடக்கையாகவோ, அல்லது இருக்கையாகவோ கொண்ட கோணங்களைப் பிறப்பிக்கும் சுற்றுங்கோடு எவ்வெவ்விடங்களிலெல்லாம் இருக்கின்றன என அறியலாம். அதிலிருந்து கோணத்தின் பொதுப்படை மதிப்பை **(general value)** காணலாம்.

137. குறித்த தொகையை நெடுக்கையாகக்கொண்ட கோணங்கள்.

முதல் முறை :—குறித்த தொகை ·5 எனக் கொள்வோம். XOX^1, YOY^1 என்ற இரண்டு நேர் ஆயங்கள் **(rectangular axes)** எடுத்து, O-ஐ மையமாக 1″ ஆரையுடைய ஒரு வட்டம் வரைக. மேலும் $y = \cdot 5$ கோட்டை வரைக. இக்கோடு வட்டத்தை P, P^1 புள்ளிகளில் வெட்டினால், அப்புள்ளிகளின் y ஆயத்தொலைகள் ·5 ஆகும். ஆகவே

$$\sin XOP = \cdot 5\,;$$
$$\sin XOP^1 = \cdot 5.$$



படம் 115

சுற்றுங்கோடு OX-லிருந்து புறப்பட்டு OP அல்லது OP^1-லிருக்கும் பொழுது அது சுற்றின கோணங்கள் ·5-ஐ நெடுக்கையாகக்கொண்ட கோணங்களாகும்.

$$XOP = \frac{\pi}{6}.$$

ஆகவே சுற்றுங்கோடு OP-ல் இருக்கும்பொழுது சுற்றின கோணங்கள்,

$$\frac{\pi}{6},\ 2\pi + \frac{\pi}{6},\ 4\pi + \frac{\pi}{6},\ \ldots\ \ldots$$

இவற்றில் எதாவது ஒன்ருக இருக்கும்.

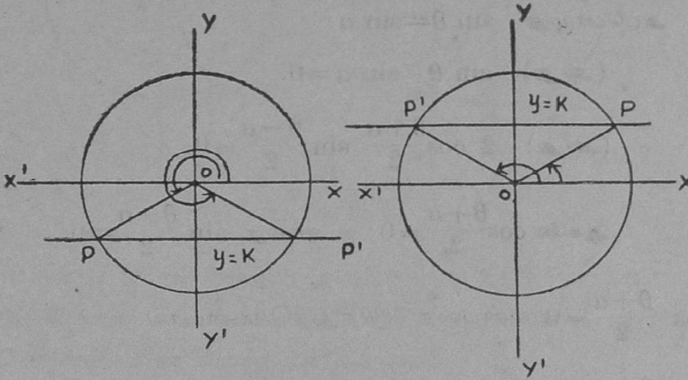
$$XOP^1 = \frac{5\pi}{6}$$ என்று எளிதிற் காணலாம்.

ஆகவே சுற்றுங்கோடு OP^1-ல் இருக்கும்பொழுது சுற்றின கோணங்கள்,

$$\frac{5\pi}{6},\ 2\pi+\frac{5\pi}{6},\ 4\pi+\frac{5\pi}{6},\ \ldots\ \ldots$$

இவற்றில் எதாவது ஒன்ருக இருக்கும்.

(*a*) குறித்த தொகை k என்று கொள்வோம். $y = k$ கோட்டை வரைந்து அது வட்டத்தை P, P^1 புள்ளிகளில் வெட்டின் $\sin XOP = k$; $\sin XOP^1 = k$ என்றும், $XOP = 180^\circ - XOP^1$ என்றும் எளிதிற் காணலாம்.



படம் 116

$XOP = a$ என்று கொண்டால் $XOP^1 = 180^\circ - a$. சுற்றுங்கோடு OX-லிருந்து புறப்பட்டு OP, OP^1 இடங்களில் இருக்கையில் சுற்றின கோணங்களின் நெடுக்கைகள் கொடுத்திருக்கும் தொகையாகும்.

சுற்றுங்கோடு OP-ல் இருக்கும்பொழுது முழு சுற்றுகளுக்குப் பிறகு a-வைச் சுற்றியிருக்கிறது. அஃதாவது r சுன்னமாகவோ, மிகை முழு எண்ணகவோ, குறை முழு எண்ணகவோ இருப்பின் சுற்றின கோணம் $2r\pi + a$.

சுற்றுங்கோடு OP^1 இடத்திலிருக்கும்பொழுது அவ்வாறே சுற்றின கோணம் $2r\pi + \pi - a$.

(அ-து) $(2r + 1)\pi - a$ ஆக இருக்கிறது.

இக்கோணங்கள் எல்லாம் n சுன்னமாகவோ, மிகை முழு எண்ணகவோ, குறை முழு எண்ணகவோ இருப்பின் $n\pi + (-1)^n a$ என்ற ஒரே கோவையில் அடங்கியிருக்கின்றன. ஏனெனின் $n = 2r$ (இரட்டை எண்) ஆக இருப்பின் $(-1)^{2r} = 1$. ஆகவே $n\pi + (-1)^n a = 2r\pi + a$ ஆகும். $n = 2r + 1$ (ஒற்றை எண்) என்றிருப்பின் $(-1)^{2r+1} = -1$. ஆகவே $n\pi + (-1)^n a = (2r + 1)\pi - a$ ஆகும்.

(*b*) **இரண்டாவது முறை** :—

குறித்த தொகையை நெடுக்கையாகக்கொண்ட மிகவும் சிறிய மிகைகோணம் a என்றும், அத்தொகையை நெடுக்கையாகக் கொண்ட வேறொரு கோணம் θ என்றும் கொள்வோம்.

அப்பொழுது $\sin\theta = \sin a$

(அ-து) $\sin\theta - \sin a = 0.$

(அ-து) $2\cos\dfrac{\theta+a}{2}\sin\dfrac{\theta-a}{2} = 0.$

ஆகவே $\cos\dfrac{\theta+a}{2} = 0$ அல்லது $\sin\dfrac{\theta-a}{2} = 0.$

$\cos\dfrac{\theta+a}{2} = 0$ என்பதை எடுத்துக்கொண்டால்

$\dfrac{\theta+a}{2} = \dfrac{\pi}{2}$-யின் ஒற்றை மடங்கு $= \dfrac{\pi}{2}(2r+1)$

(அ-து) $\theta + a = \pi\,(2r+1)$

$\therefore \quad \theta = (2r+1)\,\pi - a.$

$\sin\dfrac{\theta-a}{2} = 0$ என்பதை எடுத்துக்கொள்ளின்

$\dfrac{\theta-a}{2} = \pi$-யின் ஏதாவதொரு மடங்கு $= \pi r.$

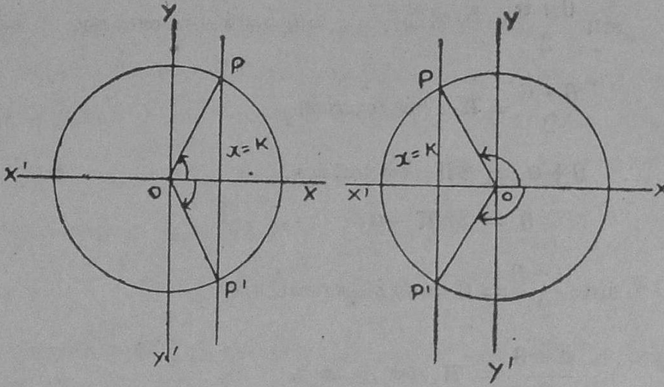
(அ-து) $\theta - a = 2r\pi.$

$\therefore \quad \theta = 2r\pi + a.$

இக்கோணங்களெல்லாம் $\theta = n\pi + (-1)^n a$ என்ற கோவையில் அடங்கியிருக்கின்றன.

138. குறித்த தொகையைக் கிடக்கையாகக்கொண்ட கோணங்கள்.

(*a*) k-ஐ குறித்த தொகையாகக் கொள்வோம். XOX^1, YOY^1 நேர் ஆயங்கள் எடுத்து, O-ஐ மையமாக 1" ஆரையுடைய ஒரு வட்டம் வரைக. மேலும் $x = k$ கோடு வரைக. அது வட்டத்தை P, P^1 புள்ளிகளில் வெட்டின் $\cos XOP = k$; $\cos XOP^1 = k$ என்றும், $XOP^1 = -(XOP^1)$ என்றும் எளிதிற் காணலாம்.



படம் 117

$XOP = \alpha$ என்று கொள்வோம். அப்பொழுது $XOP^1 = -\alpha$. சுற்றுங் கோடு **OX**-லிருந்து புறப்பட்டு **OP**, **OP**^{1} இடங்களில் இருக்கையில் சுற்றின கோணங்களின் கிடக்கைகள் k ஆகும்.

சுற்றுங்கோடு **OP** இடத்தில் இருக்கும்பொழுது முழுச் சுற்றுகளுக்குப் பிறகு α-ஐ சுற்றினதாகும். அஃதாவது r சுன்னமாகவோ, மிகை முழு எண்ணாகவோ, குறை முழு எண்ணாகவோ இருப்பின் சுற்றின கோணம் $2r\pi + \alpha$. சுற்றுங்கோடு **OP**^{1} இடத்திலிருக்கும்பொழுது முழுச் சுற்றுகளுக்குப் பிறகு $-\alpha$-ஐ சுற்றினதாகும். ஆகவே சுற்றின கோணம் $2r\pi - \alpha$.

ஆகையால் n சுன்னமாகவோ, மிகை முழு எண்ணாகவோ இருப்பின் இக்கோணங்களெல்லாம் $2n\pi \pm \alpha$ கோவையில் அடங்கியிருக்கின்றன.

(b) இரண்டாவது முறை

குறித்த தொகையைக் கிடக்கையாகக்கொண்ட மிகவும் சிறிய மிகை கோணம் α எனின்

$$\cos\theta = \cos\alpha.$$

(அ-து) $\cos\theta - \cos\alpha = 0.$

(அ-து) $2\sin\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\alpha-\theta}{2} = 0.$

ஆகவே $\sin\frac{\theta+\alpha}{2} = 0$ அல்லது $\sin\frac{\alpha-\theta}{2} = 0.$

$\sin \dfrac{\theta+a}{2}=0$ என்பதை எடுத்துக்கொண்டால்

$\dfrac{\theta+a}{2}=\pi$-யின் மடங்கு

$\therefore \quad \theta+a = 2\pi$-யின் மடங்கு.

$\therefore \quad \theta = 2n\pi - a.$

$\sin \dfrac{a-\theta}{2}=0$ எனக்கொண்டால்

$\dfrac{a-\theta}{2}=\pi$-யின் மடங்கு.

$a-\theta = 2\pi$-யின்மடங்கு.

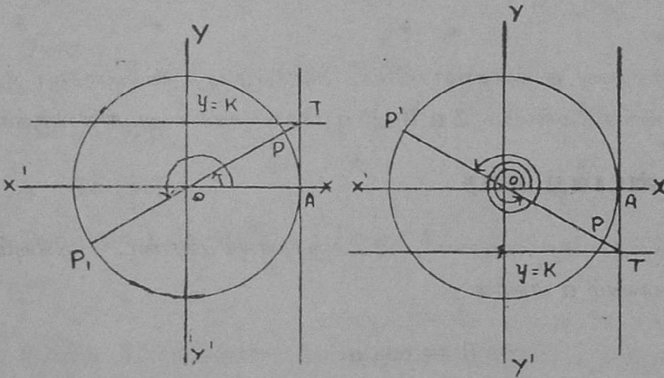
$\therefore \quad \theta - a = 2\pi$-யின் மடங்கு $= 2n\pi.$

$\therefore \quad \theta = 2n\pi + a.$

இக்கோணங்களெல்லாம் $\theta=2n\pi \pm a$ கோவையில் அடங்கியிருக்கின்றன.

139. குறித்த தொகையை இருக்கையாகக்கொண்ட கோணங்கள்.

(a) **முதல் முறை**



படம் 118

k-ஐ குறித்த தொகையாகக்கொள்வோம். XOX^1, YOY^1 இரண்டு நேர் ஆயங்கள் எடுத்து O-ஐ மையமாக 1″ ஆரையுடைய ஒரு வட்டம் வரைக. OX வட்டத்தை A-யில் வெட்டுவதென்று கொள்வோம். A வழியாகச் செல்லும் தொடுவரையும் $Y=k$ கோட்டையும் வரைக.

இக்கோடு தொடுவரையை T-யில் வெட்டுவதாகக் கொள்வோம். T வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தின் விட்டம் வரைக. இவ்விட்டம் வட்டத்தை P, P^1 புள்ளிகளில் வெட்டுவதாகக் கொள்வோம்.

அப்பொழுது $\tan XOP = k$; $\tan XOP^1 = k$.

எனெனின் $\tan XOP = \dfrac{AT}{OA} = \dfrac{k}{1} = k$;

$$\tan (XOP^1) = \tan (\pi + XOP) = \tan XOP = k.$$

ஆகவே சுற்றுங்கோடு OX-லிருந்து புறப்பட்டு OP அல்லது OP^1 இடங்களில் இருக்கும்பொழுது அது சுற்றின கோணங்கள் k-ஐ இருக்கையாகக்கொண்ட கோணங்களாகும்.

சுற்றுங்கோடு OP-ல் இருக்கும்பொழுது முழு சுற்றுகளுக்குப் பிறகு a-ஐ சுற்றினதாகும். ஆகையால் சுற்றின கோணம் $2r\pi + a$. இவ்வாறே சுற்றுங்கோடு OP^1-ல் இருக்கும்பொழுது சுற்றின கோணம் $2r\pi + \pi + a$ (அ-து) $(2r+1)\pi + a$.

n சுன்னமாகவோ, மிகை முழு எண்ணுகவோ குறை முழு எண்ணுகவோ இருக்கையில், இக்கோணங்களெல்லாம் $n\pi + a$ கோவையில் அடங்கியிருக்கின்றன. எனெனின் n இரட்டை எண்ணுக இருப்பின் $(n = 2r)$, $n\pi + a = 2r\pi + a$ என்ருகும்; ஒற்றை எண்ணுக இருப்பின் $(n = 2r+1)$, $n\pi + a = (2r+1)\pi + a$. என்ருகும்.

(b) இரண்டாவது முறை

குறித்த தொகையை இருக்கையாகக்கொண்ட மிகவும் சிறிய மிகை கோணம் a எனக்கொள்வோம்.

அப்பொழுது $\tan \theta = \tan a$.

(அ-து) $\tan \theta - \tan a = 0$.

(அ-து) $\dfrac{\sin \theta}{\cos \theta} - \dfrac{\sin a}{\cos a} = 0$.

(அ-து) $\sin \theta \cos a - \cos \theta \sin a = 0$.

(அ-து) $\sin (\theta - a) = 0$.

$\therefore \theta - a = \pi$-யின் ஏதாவது ஒரு மடங்காகும்.

$= n\pi$. (n ஒரு முழு எண்)

$\therefore \theta = n\pi + a$.

பயிற்சி 1. $\frac{\sqrt{3}}{2}$-ஐ நெடுக்கையாகக் கொண்ட கோணங்களின் பொதுப்படைக் கோவை என்ன?

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ என்பதை நெடுக்கையாகக் கொண்ட மிகவும் சிறிய மிகைக் கோணம் 60°. (அ-து) $\frac{\pi}{3}$

$$\therefore \quad \sin\theta = \sin\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \quad \theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{3}$$

பயிற்சி 2. $-\frac{1}{2}$-ஐ கிடக்கையாகக் கொண்ட கோணங்களின் பொதுப்படைக் கோவை என்ன?

$-\frac{1}{2}$-ஐ கிடக்கையாகக்கொண்ட மிகவும் சிறிய மிகைகோணம் 120°

(அ-து) $\frac{2\pi}{3}$

$$\therefore \quad \cos\theta = \cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore \quad \theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

பயிற்சி 3. $\frac{1}{\sqrt{3}}$-ஐ இருக்கையாகக் கொண்ட கோணங்களின் பொதுப்படைக் கோவை என்ன?

$\frac{1}{\sqrt{3}}$-ஐ இருக்கையாகக்கொண்ட மிகவும் சிறிய மிகைகோணம் 30°.

(அ-து) $\frac{\pi}{6}$

$$\therefore \quad \tan\theta = \tan\frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \quad \theta = n\pi + \frac{\pi}{6}$$

பயிற்சி 4. $4 \sin^2\theta = 1$ என்ற சமன்பாட்டினை விடுவி.

$$\sin^2\theta = \tfrac{1}{4}.$$

$$\therefore \quad \sin\theta = \pm\tfrac{1}{2}.$$

மிகைக் குறியை எடுத்தால் $\sin\theta = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$

$$\therefore \quad \theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$$

குறைக் குறியை எடுத்தால் $\sin\theta = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$$\therefore \quad \theta = n\pi + (-1)^n\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= n\pi - (-1)^n\frac{\pi}{6}.$$

ஆகவே $\theta = n\pi \pm (-1)^n \frac{\pi}{6}$.

$$= n\pi \pm \frac{\pi}{6}.$$

பயிற்சி 5. $2\sin^2\theta + \cos\theta = 1$ என்ற சமன்பாட்டினை விடுவி.

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta.$$

$$\therefore \quad 2(1 - \cos^2\theta) + \cos\theta = 1.$$

$$\therefore \quad 2\cos^2\theta - \cos\theta - 1 = 0.$$

$$(2\cos\theta + 1)(\cos\theta - 1) = 0.$$

$\therefore \quad \cos\theta = 1$ அல்லது $\cos\theta = -\frac{1}{2}$.

$\cos\theta = 1$ என்றிருப்பின் $\cos\theta = \cos 0^\circ$.

$$\therefore \quad \theta = 2n\pi \pm 0^\circ.$$

$$= 2n\pi.$$

$\cos\theta = -\frac{1}{2}$ என்றிருப்பின் $\cos\theta = \cos\frac{2\pi}{3}$.

$$\therefore \quad \theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}.$$

ஆகவே $\theta = 2n\pi$ அல்லது $2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$.

பயிற்சி 6. $9(\cos^2\theta+\sin\theta)=11$-ஐ விடுவி.

$$9(1-\sin^2\theta+\sin\theta)=11.$$
$$9\sin^2\theta-9\sin\theta+2=0.$$
$$(3\sin\theta-2)(3\sin\theta-1)=0.$$
$$\therefore\quad \sin\theta=\tfrac{2}{3}\ \text{அல்லது}\ \tfrac{1}{3}.$$
$$(\text{அ-து})\quad \sin\theta=\cdot6667\ \text{அல்லது}\ \cdot3333.$$

பட்டிகையிலிருந்து $\theta=41^\circ 49'$ அல்லது $19^\circ 28'$ எனக்காணலாம்.

$$\therefore\quad \sin\theta=\sin(41^\circ 49')\ \text{அல்லது}\ \sin(19^\circ 28')$$
$$\therefore\quad \theta=n\times180^\circ+(-1)^n 41^\circ 49'\ \text{அல்லது}$$
$$n\times180^\circ+(-1)^n 19^\circ 28'.$$

பயிற்சி 7. $\cos^2\theta-\sin\theta=\frac{1}{4}$-ஐ விடுவி.

$$(1-\sin^2\theta)4-4\sin\theta-1=0.$$
$$4\sin^2\theta+4\sin\theta-3=0.$$
$$(2\sin\theta+3)(2\sin\theta-1)=0.$$
$$\therefore\quad \sin\theta=-\tfrac{3}{2}\ \text{அல்லது}\ \tfrac{1}{2}.$$

$\sin\theta$-வின் மதிப்பு -1-ஐவிடக் குறைவாக இருத்தல்முடியாது. ஆகவே $\sin\theta=-\frac{3}{2}$ என்பதைத் தள்ளிவிடலாம்.

$$\text{ஆகவே}\ \sin\theta=\tfrac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$$
$$\therefore\quad \theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$$

பயிற்சி 8. $\tan\theta+2\cot\theta=3$-ஐ விடுவி.

$$\tan\theta+\frac{2}{\tan\theta}=3.$$
$$\therefore\quad \tan^2\theta-3\tan\theta+2=0.$$
$$(\text{அ-து})\quad (\tan\theta-1)(\tan\theta-2)=0.$$
$$\therefore\quad \tan\theta=1\ \text{அல்லது}\ 2.$$

$\tan\theta=1$ என்றிருப்பின் $\tan\theta=\tan\frac{\pi}{4}$

$$\therefore\quad \theta=n\pi+\frac{\pi}{4}$$

$\tan\theta=2$ என்றிருப்பின் $\tan\theta=\tan 63^\circ 26'$ (பட்டிகையிலிருந்து)

$$\therefore\quad \theta=n\times180^\circ+63^\circ 26'$$

பயிற்சிகள் 32

கீழ்க் கொடுப்பனவற்றிலிருந்து, θ-வின் பொதுப்படை மதிப்பினைக் காண்க :—

(1) $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (2) $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (4) $\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

(5) $\sin\theta = -\frac{1}{2}$ (6) $\cos\theta = -\frac{1}{2}$

(7) $\tan\theta = 1$ (8) $\tan\theta = -1$

(9) $\tan^2\theta = 4$ (10) $\tan^3\theta = 8$

(11) $2\sin 4\theta = \sqrt{3}$ (12) $2\cos 3\theta = 1$

(13) $\sqrt{3}\tan 4\theta = 1$ (14) $\operatorname{cosec}\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$

(15) $\sec\theta = 2$ (16) $\cos^2\theta = \frac{1}{4}$

(17) $\cot\theta = 1$ (18) $\sec^2\theta = \frac{4}{3}$

(19) $\cot\theta = -\sqrt{3}$ (20) $\operatorname{cosec}^2\theta = \frac{4}{3}$

கீழ் கொடுத்திருக்கும் சமன்பாடுகளை விடுவி.

(21) $2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1 = 0.$ (22) $3\sin^2\theta - 2\sin\theta - 1 = 0.$

(23) $4\cos^2\theta - 1 = 0.$ (24) $\sin\theta(1 - \cos\theta) = 0.$

(25) $4\cos^2\theta - 5\cos\theta - 1 = 0.$ (26) $\tan\theta(1 + \cot\theta) = 0.$

(27) $15\sin\theta + 2\cos^2\theta - 9 = 0.$ (28) $\sec^2\theta + \tan\theta = 3.$

(29) $\cot\theta + 3\tan\theta = 5\operatorname{cosec}\theta.$ (30) $2\sin^2 x + \sqrt{3}\cos x + 1 = 0.$

(31) $\tan^2 x - (1 + \sqrt{3})\tan x + \sqrt{3} = 0.$

(32) $\cot^2\theta + \left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cot\theta + 1 = 0.$

(33) $\tan^2\theta + \cot^2\theta = 2.$ (34) $\cot\theta + \tan\theta = 2\operatorname{cosec}\theta.$

(35) $3(\sec^2\theta + \tan^2\theta) = 5.$ (36) $4\cos 2\theta + 3\cos\theta - 1 = 0.$

(37) $4\cos 2\theta + 6\sin\theta - 5 = 0.$ (38) $2\sin^2\theta + \sin^2 2\theta = 2.$

(39) $12\cot^2\theta - 31\operatorname{cosec}\theta + 32 = 0.$ (40) $3\sin\theta\sin 2\theta + \cos 2\theta - 1 = 0.$

பயிற்சி 9. $\tan m\theta = \cot p\theta$-ஐ விடுவி.

$\tan m\theta = \cot p\theta$ என்ற சமன்பாட்டினை

$\tan m\theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - p\theta\right)$ என எழுதலாம்.

$\left(\frac{\pi}{2} - p\theta\right)$-யின் இருக்கையே, இருக்கையாய் கொண்ட கோணங்களின் பொதுப்படைமதிப்பு $n\pi + \frac{\pi}{2} - p\theta$. ($n$ ஒரு முழு எண்)

$$\text{ஆகவே } m\theta = n\pi + \frac{\pi}{2} - p\theta.$$

$$(\text{அ-து}) \quad (m+p)\,\theta = n\pi + \frac{\pi}{2}.$$

$$\therefore \quad \theta = \frac{1}{m+p}\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

பயிற்சிகள் 33

அடியிற் கொடுத்திருக்கும் சமன்பாடுகளை விடுவி.

(1) $\tan 3\theta = \tan 7\theta$.

(2) $\tan 3\theta = \cot \theta$.

(3) $\sin \theta = \sin 2\theta$.

(4) $\sin \theta = \cos 2\theta$.

(5) $\sin(\theta + 20^\circ) = \sin(3\theta + 50^\circ)$

(6) $\sin(\theta + 10^\circ) = \cos 3\theta$.

(7) $\cos 5\theta = \cos 2\theta$.

(8) $\cos m\theta = \cos p\theta$.

(9) $\cos m\theta = \sin p\theta$.

(10) $\tan m\theta + \cot p\theta = 0$.

(11) $\cot^2 m\theta = \cot^2 a$.

(12) $\tan^2 3\theta = \cot^2 a$.

(13) $\tan^2 2\theta = \tan^2 a$.

(14) $\tan 4\theta \tan 2\theta = 1$.

பயிற்சி 10. $a\cos\theta + b\sin\theta = c$-ஐ விடுவி. $a > 0, b > 0$.

சமன்பாட்டின் இரண்டு பக்கங்களையும் $\sqrt{a^2+b^2}$-ஆல் வகுத்தால் மேற்கொடுத்திருக்கிற சமன்பாட்டினைப் பின் வருமாறு எழுதலாம்.

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

a, b என்பவற்றின் மதிப்புகள் தெரியுமாதலால் பட்டிகையிலிருந்து $\frac{b}{a}$-ஐ இருக்கையாய்க்கொண்ட குறுங்கோணத்தை அறியலாம். அக் கோணத்தை α என்று கொள்வோம்.

$$\therefore \quad \tan \alpha = \frac{b}{a}.$$

$$\text{ஆகவே} \quad \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos \alpha, \; \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin \alpha.$$

மேலும் பட்டிகையிலிருந்து $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$-ஐ கிடக்கையாய்க் கொண்ட கோணத்தைக் காணலாம். அதனை β எனக் கொள்வோம்.

ஆகவே சமன்பாட்டினை அடியிற்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$\cos\theta \cos\alpha + \sin\theta \sin\alpha = \cos\beta.$$

$$(\text{அ-து}) \quad \cos(\theta - \alpha) = \cos\beta$$

$$(\text{அ-து}) \quad \theta - \alpha = 2n\pi \pm \beta.$$

$$\therefore \quad \theta = 2n\pi + \alpha \pm \beta.$$

பயிற்சி 11. $a \cos\theta - b \sin\theta = c$-ஐ விடுவி. $a > 0$, $b > 0$. சமன்பாட்டின் இரண்டு பக்கங்களையும் $\sqrt{a^2+b^2}$-ஆல் வகுத்தால் மேற் கொடுத்திருக்கும் சமன்பாட்டினை பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos\theta - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin\theta = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

பட்டிகையிலிருந்து $\frac{b}{a}$-ஐ இருக்கையாகக் கொண்ட கோணத்தை அறியலாம். அதனை α எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad \tan\alpha = \frac{b}{a}$$

$$\text{ஆகவே} \quad \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha, \; \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha.$$

மேலும் பட்டிகையிலிருந்து $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$-ஐ கிடக்கையாகக் கொண்ட கோணத்தை அறியலாம். அதனை β எனக் கொள்வோம்.

ஆகவே சமன்பாட்டினைப் பின்வருமாறு எழுதலாம் :—

$$\cos\theta\cos a - \sin\theta\sin a = \cos\beta.$$

(அ-து) $\cos(\theta + a) = \cos\beta$

(அ-து) $\theta + a = 2n\pi \pm \beta$

$\therefore \quad \theta = 2n\pi - a \pm \beta.$

குறிப்பு:—பயிற்சிகள் 10-லும், 11-லும் $\sqrt{a^2+b^2}$-ஐ விட c பெரியதாக இருப்பின் $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} > 1$. அதனால் β-ஐக் காணமுடியாது. ஆகவே சமன்பாட்டினை விடுவித்தல் இயலாது.

பயிற்சி 12. $4\sin\theta + 3\cos\theta = 4$-ஐ விடுவி.

இரண்டு பக்கங்களையும் $\sqrt{16+9} = 5$-ஆல் வகுத்தால்

$$\tfrac{3}{5}\cos\theta + \tfrac{4}{5}\sin\theta = \tfrac{4}{5}.$$

பட்டிகையிலிருந்து $\cos 53^\circ 8' = \frac{3}{5}$, $\cos 36^\circ 52' = \frac{4}{5}$.

$\therefore \quad \cos 53^\circ 8' \cos\theta + \sin 53^\circ 8' \sin\theta = \cos 36^\circ 52'$

$\therefore \quad \cos(\theta - 53^\circ 8') = \cos(36^\circ 52')$

$(\theta - 53^\circ 8') = 2n \times 180 \pm 36^\circ 52'$

$\therefore \quad \theta = 2n \times 180^\circ \pm 36^\circ 52' + 53^\circ 8'.$

$\therefore \quad \theta = 2n \times 180^\circ + 90^\circ$ அல்லது $2n \times 180^\circ + 16^\circ 16'$

பயிற்சிகள் 34

கீழ்க்கொடுத்திருக்கும் 1—8 வரையுள்ள சமன்பாடுகளில் 0°-க்கும் 180°-க்கும் இடையிலுள்ள θ-வின் மதிப்புகளைக் காண்க.

(1) $8\cos\theta - \sin\theta = 4$.

(2) $3\sin\theta + 4\cos\theta = 5$.

(3) $\cos\theta + 3\sin\theta = 2$.

(4) $10\cos\theta + 5\sin\theta = 11$.

(5) $\sin\theta - 2\cos\theta = \frac{4}{3}$.

(6) $10\tan\theta - 2\sec\theta - 5 = 0$.

(7) $\cos 2\theta = \sin 2\theta - 1$.

(8) $\cos 2\theta = \frac{1}{2}(3\sin 3\theta - 1)$.

கீழ்க் கொடுத்திருக்கும் சமன்பாடுகளை விடுவி.

(9) $5 \cos \theta - 2 \sin \theta = 2$.

(10) $\sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta = \sqrt{2}$.

(11) $\sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta = \sqrt{2}$.

(12) $\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2}$.

(13) $6 \cos \theta + 8 \sin \theta = 9$.

(14) $\tan \theta + \sec \theta = \sqrt{3}$.

(15) $\operatorname{cosec} \theta = 1 + \cot \theta$.

(16) $\sin \theta + 2 \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(17) $\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \cos A$.

பயிற்சி 13. $\sin \theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta = 0$-ஐ விடுவி.

$$\sin \theta + \sin 3\theta = 2 \sin 2\theta \cos \theta.$$

சமன்பாட்டைக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்:—

$$2 \sin 2\theta \cos \theta + \sin 2\theta = 0.$$

$$\therefore \quad \sin 2\theta\,(1 + 2 \cos \theta) = 0.$$

$$\therefore \quad \sin 2\theta = 0 \text{ அல்லது } 2 \cos \theta + 1 = 0.$$

$\sin 2\theta = 0$ என்பதிலிருந்து $\sin 2\theta = \sin 2n\pi$.

$$\therefore \quad 2\theta = 2n\pi$$

$$\therefore \quad \theta = n\pi.$$

$\cos \theta = -\frac{1}{2}$ என்பதிலிருந்து $\cos \theta = \cos \left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$$\therefore \quad \theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

பயிற்சிகள் 35

கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளை விடுவி.

(1) $\sin 5\theta - \sin 3\theta + \sin \theta = 0$.

(2) $\cos \theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta = 0$.

(3) $\sin 7\theta - \sin \theta - \sin 3\theta = 0$.

(4) $\sin 8\theta = \sin 5\theta - \sin 2\theta$.

(5) $\cos 3\theta - \cos 2\theta + \cos \theta = 0$.

(6) $\cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta = 0$.

(7) $\cos 2\theta - \cos \theta + 1 = 0$.

(8) $4\sin\theta\sin(\theta-\alpha)=2\cos\alpha-1.$

(9) $\cos 8\theta-\cos 4\theta=\sin 6\theta.$

(10) $\sin 8\theta+\sin 6\theta=\sin 2\theta.$

(11) $\cos 3\theta-\cos 4\theta=\cos 5\theta-\cos 6\theta.$

(12) $2\sqrt{2}\cos 2\theta\cos(2\theta-\alpha)=\sqrt{2}\cos\alpha+1.$

(13) $2\sin 4\theta\cos(3\theta-\alpha)=\sin(\theta+\alpha)+1.$

(14) $\sin\alpha+\sin(\alpha+\theta)+\sin(\alpha+2\theta)=0.$

(15) $\cos\alpha+\cos(\alpha+\theta)+\cos(\alpha+2\theta)=0.$

(16) $\cos\theta+\cos 2\theta=\sin 3\theta.$

140. கீழ் மடங்குக் கோணங்கள் (sub multiple angles).

$\cos A=\frac{1}{2}$ என்பதிலிருந்து $\sin\frac{A}{2}$-வின் மதிப்பைக் காண வேண்டுமெனக் கொள்வோம்.

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}=\sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{2})}=\sqrt{\tfrac{1}{4}}=\pm\tfrac{1}{2}$$

ஆகவே $\sin\frac{A}{2}$-விற்கு இரண்டு மதிப்புகள் இருக்கின்றன. **A** எக்கால் வட்டத்தில் இருக்கிறதென்று தெரியாமல் **cos A**-வின் மதிப்புமட்டும் தெரிந்திருப்பின் $\sin\frac{A}{2}$-வின் மதிப்பிலுள்ள ஈரடியான குறியை **(ambiguous sign)** அகற்ற முடியாது.

பயிற்சி 14. $22\frac{1}{2}^\circ$-ன் நெடுக்கையும் கிடக்கையும் காண்க.

$$2\sin^2 22\tfrac{1}{2}^\circ=1-\cos 45^\circ=1-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\therefore\quad \sin 22\tfrac{1}{2}^\circ=\pm\sqrt{\left(\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}\right)}=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}$$

$22\frac{1}{2}^\circ$ முதல் கால்வட்டத்திலிருப்பதால் குறைக் குறியைத் தள்ளிவிடலாம்.

$$\therefore\quad \sin 22\tfrac{1}{2}^\circ=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

இவ்வாறே $\cos 22\frac{1}{2}^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

141. cos A-வின் மதிப்புத் தெரிந்தால், sin $\frac{A}{2}$, cos $\frac{A}{2}$ என்பவற்றின் மதிப்புகள் காணுதலும், அவை ஒவ்வொன்றிற்கும் இரண்டு மதிப்புகள் இருப்பதின் விளக்கமும்.

$$2\sin^2\frac{A}{2}=1-\cos A, \quad 2\cos^2\frac{A}{2}=1+\cos A$$

என்ற முற்றொருமைகளிலிருந்து

$$\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}} \text{ என்றும், } \cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

என்றும் கிடைக்கின்றன. cos A-வின் ஒரு மதிப்புக்கு எதிர்நிலையாக (corresponding) sin $\frac{A}{2}$, cos $\frac{A}{2}$ என்பவை ஒவ்வொன்றிற்கும் இரண்டு மதிப்புகள் இருக்கின்றன. இரண்டு மதிப்புகள் எவ்வாறு கிடைக்கின்றன என்பதைப் பின்வருமாறு விளக்கலாம்.

cos A-வின் மதிப்பு மட்டும் தெரிந்து, $\angle$A-ஐப்பற்றி ஒன்றும் தெரியாவிட்டால், $\angle$A ஒரே கிடக்கையுடைய கோணங்களில் ஒன்று என்று மட்டுமே நமக்குத் தெரியும். அக்கோணங்களில் a என்பதை மிகவும் குறைந்த மிகைக்கோணம் எனக் கொள்வோம். அப்பொழுது $A=2n\pi\pm a$. ஆகவே sin $\frac{A}{2}$, cos $\frac{A}{2}$ என்பவற்றின் மதிப்புகள் காணும்போது, உண்மையாக $\sin\frac{1}{2}(2n\pi\pm a)$, $\cos\frac{1}{2}(2n\pi\pm a)$ என்பவற்றின் மதிப்புகளைக் காணுகிறோம்.

$$\therefore \sin\frac{A}{2}=\sin\tfrac{1}{2}(2n\pi\pm a)=\sin\left(n\pi\pm\frac{a}{2}\right)$$

$$=\sin n\pi\cos\frac{a}{2}\pm\cos n\pi\sin\frac{a}{2}$$

$$=\pm\sin\frac{a}{2}. \quad [\text{ஏனெனின் } \sin n\pi=0, \ \cos n\pi=\pm1].$$

மேலும் $\cos\frac{A}{2} = \cos\frac{1}{2}(2n\pi \pm a)$

$$= \cos n\pi \cos\frac{a}{2} \mp \sin n\pi \sin\frac{a}{2}$$

$$= \pm\cos\frac{a}{2} \text{ [ஏனெனின் } \sin n\pi = 0, \; \cos n\pi = \pm 1].$$

ஆகவே $\cos A$-ன் மதிப்பு மட்டும் தெரியுமானல் $\sin\frac{A}{2}$-விற்கு இரண்டு மதிப்புகளும், $\cos\frac{A}{2}$-விர்கு இரண்டு மதிப்புகளும் இருக்கின்றன.

பயிற்சி 15. $\cos A = -\frac{7}{25}$. 450°-க்கும், 540°க்கும் இடையில் A இருக்கிறது. $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$ என்பவற்றின் மதிப்புகள் யாவை?

$$\sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}} = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(1 = \tfrac{7}{25})} = \pm\tfrac{4}{5}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}} = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(1 - \tfrac{7}{25})} = \pm\sqrt{\tfrac{9}{25}} = \pm\tfrac{3}{5}$$

450°-க்கும், 540°-க்கும் இடையில் A இருப்பதால் $\frac{A}{2}$, 225°-க்கும், 270°-க்கும் இடையிலிருக்கிறது. அஃதாவது மூன்ருவது கால் வட்டத்தில் இருக்கிறது. எனவே $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$ என்பவற்றின் மதிப்புகள் குறை கணியங்களே.

$$\therefore \quad \sin\frac{A}{2} = -\tfrac{4}{5}; \; \cos A = -\tfrac{3}{5}.$$

142. $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$ **என்பவற்றை** $\sin A$ **மூலம் காணுதல்.**

$$\sin^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{A}{2} = 1 \qquad (1)$$

$$2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = \sin A. \qquad (2)$$

ஆகவே (1)-ஐயும் (2)-ஐயும் கூட்டினால்

$$\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)^2=1+\sin A.$$

$$\therefore\quad \sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}. \qquad (3)$$

(1)-ஐ (2)-லிருந்து கழித்தால்

$$\left(\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}\right)^2=1-\sin A.$$

$$\therefore\quad \sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1-\sin A}. \qquad (4)$$

(3)-ம் (4)-ம் கூட்டினால்

$$2\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}\pm\sqrt{1-\sin A}.$$

$$\therefore\quad \sin\frac{A}{2}=\tfrac{1}{2}\left\{\pm\sqrt{1+\sin A}\pm\sqrt{1-\sin A}.\right\} \qquad (5)$$

(4)-ஐ (3)-லிருந்து கழித்தால்

$$2\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}\mp\sqrt{1-\sin A}.$$

$$\therefore\quad \cos\frac{A}{2}=\tfrac{1}{2}\left\{\pm\sqrt{1+\sin A}\mp\sqrt{1-\sin A}.\right\} \qquad (6)$$

143. (5), (6)-களில் ஒவ்வொரு படி மூலத்திற்கு முன்பும்; ஈரடியான குறிகள் இருப்பதால், **sin A**-வின் ஒரு மதிப்பிற்கு எதிர்நிலையாக, **sin** $\frac{A}{2}$-விற்கு நான்கு மதிப்புகளும், **cos** $\frac{A}{2}$-விற்கு நான்கு மதிப்புகளும் இருக்கின்றன. இந்நான்கு மதிப்புகள் கிடைப்பதற்குள்ள காரணத்தை பின்வருமாறு விளக்கலாம்:— **sin A**-வின் மதிப்பு மட்டும் தெரிந்து, $\angle$ **A**-ஐப்பற்றி மற்றொன்றும் தெரியாவிட்டால், **A** ஒரே நெடுக்கையுடைய கோணங்களில் ஒன்று என்றுமட்டுமே நமக்குத் தெரியும். அக்கோணங்களில் a மிகவும் குறைந்த மிகைக்கோணம் எனக்கொள்வோம்.

அப்பொழுது $A=n\pi+(-1)^n a$.

ஆகவே $\sin\frac{A}{2}$; $\cos\frac{A}{2}$ என்பவற்றின் மதிப்புகள் காணும்பொழுது உண்மையாக நாம் $\sin\frac{1}{2}\{n\pi+(-1)^n a\}$; $\cos\frac{1}{2}\{n\pi+(-1)^n a\}$ என்பவற்றின் மதிப்புகளைக் காணுகிறோம்.

முதலில் n-ஐ இரட்டை எண் எனக்கொள்வோம்.

அப்பொழுது $n=2m$ (m ஒரு முழு எண்).

$$\sin\tfrac{1}{2}\{n\pi+(-1)^n a\}=\sin\tfrac{1}{2}\{2m\pi+(-1)^{2m}a\}$$

$$=\sin\left(m\pi+\frac{a}{2}\right)$$

$$=\sin m\pi\cos\frac{a}{2}+\cos m\pi\sin\frac{a}{2}.$$

$$=\pm\sin\frac{a}{2}.$$

இரண்டாவதாக n-ஐ ஒற்றை எண்ணாகக் கொள்வோம்.

அப்பொழுது $n=2m+1$ (m ஒரு முழு எண்).

அந்நிலையில் $\sin\frac{1}{2}\{n\pi+(-1)^n a\}$

$$=\sin\tfrac{1}{2}\{(2m+1)\pi+(-1)^{2m+1}a\}.$$

$$=\sin\left(m\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2}\right)$$

$$=\sin m\pi\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2}\right)+\cos m\pi\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2}\right)$$

$$=\pm\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2}\right)$$

$$=\pm\cos\frac{a}{2}.$$

ஆகவே $\sin A$-வின் மதிப்பு மட்டும் தெரியுமானல் $\sin\frac{A}{2}$-விற்கு நான்கு மதிப்புகள் இருக்கின்றன. இவ்வாறே $\cos\frac{A}{2}$-க்கும் நான்கு மதிப்புகள் $\pm\cos\frac{a}{2}$, $\pm\sin\frac{a}{2}$ இருக்கின்றன என்று நிறுவலாம்.

144. **sin A**-வின் மதிப்பைத் தவிர, A-யின் பருமனைப்பற்றி ஏதாவது கூடுதலாகத் தெரிமானால் $\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}$, $\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}$ என்பவற்றின் குறிகளைக் காணலாம். அப்பொழுது $\sqrt{1+\sin A}$, $\sqrt{1-\sin A}$ என்பவற்றின் குறிகள் என்னென்று தெரியும். ஆகவே ஈரடியான குறியை அகற்ற இயலும்.

$$\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}=\sqrt{2}\left(\sin\frac{A}{2}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{A}{2}\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\sqrt{2}\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

ஆகவே $\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}$, $\sqrt{2}\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ என்பவை ஒரே குறியுடையதாக இருக்கின்றன.

இவ்வாறே $\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}$, $\sqrt{2}\sin\left(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{2}\right)$ என்பனவும் ஒரே குறியுடையதாக இருக்கின்றன.

ஆகையால் $\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}$, $\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}$ என்பனவற்றின் குறிகளை அறிவதற்கு முறையே $\frac{A}{2}+\frac{\pi}{4}$, $\frac{A}{2}-\frac{\pi}{4}$ என்பவை எந்தெந்த கால்வட்டங்களில் இருக்கின்றன எனத் தெரியவேண்டும்.

$\frac{A}{2}+\frac{\pi}{4}$ முதல் இரண்டு கால் வட்டங்களில் இருக்கும்பொழுது $\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}$ மிகைக் கணியமாகவும், பின் இரண்டு கால் வட்டங்களில் இருக்கும்பொழுது $\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}$ குறைக் கணியமாகவும் இருக்கிறது. இவ்வாறே $\frac{A}{2}-\frac{\pi}{4}$ முதல் இரண்டு கால்வட்டங்களில் இருக்கும்பொழுது $\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}$ மிகைக்கணியமாகவும், அடுத்த இரண்டு கால் வட்டங்களிலிருக்கும்பொழுது $\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}$ குறைக்கணியமாகவும் இருக்கிறது.

பயிற்சி 16. **sin 9°, cos 9°** என்பவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

sin 9°, cos 9° என்பவை மிகைகணியமாகவும்,

cos 9° > sin 9° ஆகவும் இருக்கின்றன.

$$\therefore \quad \cos 9° + \sin 9° = \sqrt{1+\sin 18°} = \sqrt{1+\frac{\sqrt{5}-1}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3+\sqrt{5}}$$

$$\cos 9° - \sin 9° = \sqrt{1-\sin 18°} = \sqrt{1-\frac{\sqrt{5}-1}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}$$

ஆகவே $\cos 9° = \frac{1}{4}\left\{\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{5-\sqrt{5}}\right\}$

$$\sin 9° = \tfrac{1}{4}\left\{\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{5-\sqrt{5}}\right\}$$

பயிற்சி 17. **sin 15°, cos 15°** என்பவற்றின் மதிப்புகள் யாவை?

$$\sin 15° + \cos 15° = \pm\sqrt{1 + \sin 30°} = \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\sin 15° - \cos 15° = \pm\sqrt{1 - \sin 30°} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

sin 15°, cos 15° மிகைக் கணியமாகவும், **cos 15° > sin 15°** என்றும் இருப்பதால்

$$\sin 15° + \cos 15° = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\sin 15° - \cos 15° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad \sin 15° = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\ ; \ \cos 15° = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

பயிற்சி 18. 450°-க்கும் 630°க்கும் இடையில் A இருக்கும் பொழுது **sin A**-வின் மூலம் $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$ என்பவற்றைக் காண்க.

225°-க்கும் 315°-க்கும் இடையில் $\frac{A}{2}$ இருக்கிறது.

$\therefore$ $270°$-க்கும், $360°$-க்கும் இடையில் $\frac{A}{2}+45°$ இருக்கிறது.

$$\therefore \quad \sin\left(\frac{A}{2}+45°\right) \text{ குறைக் கணியமாகும்.}$$

$$\therefore \quad \sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2} \text{ குறைக் கணியமாகும்.}$$

$\frac{A}{2}-45°$, $180°$-க்கும் $270°$-க்கும் இடையிலிருக்கிறது.

$$\therefore \quad \sin\left(\frac{A}{2}-45°\right) \text{ குறைக் கணியமாகும்.}$$

$$\therefore \quad \sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2} \text{ குறைக் கணியமாகும்.}$$

ஆகவே $\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}=-\sqrt{1+\sin A}.$

$$\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}=-\sqrt{1-\sin A}.$$

$$\therefore \quad 2\sin\frac{A}{2}=-\sqrt{1+\sin A}-\sqrt{1-\sin A}.$$

$$2\cos\frac{A}{2}=-\sqrt{1+\sin A}+\sqrt{1-\sin A}.$$

பயிற்சிகள் 36

1. $-270°$-க்கும், $-360°$-க்கும் இடையில் A இருக்கும்பொழுது

$$\sin\frac{A}{2}=-\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}} \text{ என்று நிறுவுக.}$$

2. $\sin 570° = -\frac{1}{2}$, $\sin 285°$, $\cos 285°$ என்பனவற்றின் மதிப்பு என்ன ?

3. $\theta = 480°$ எனின் $2\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{1+\sin\theta}+\sqrt{1-\sin\theta}$

என்று நிறுவுக.

4. $A = 350^\circ$ என்றால்

$$2 \sin \frac{A}{2} = -\sqrt{1+\sin A} + \sqrt{1-\sin A}.$$

$$2 \cos \frac{A}{2} = -\sqrt{1+\sin A} - \sqrt{1-\sin A}$$ என்று நிறுவுக.

5. $A = 560^\circ$ எனின் $2 \sin \frac{A}{2} = -\sqrt{1+\sin A} - \sqrt{1-\sin A}$ என்று நிறுவுக.

6. பின்வரும் சமன்பாடுகள் உண்மைப்பட A-யின் எல்லைகள் யாவை?

(1) $2 \sin A = \sqrt{1+\sin 2A} - \sqrt{1-\sin 2A}.$

(2) $2 \cos A = -\sqrt{1+\sin 2A} + \sqrt{1-\sin 2A}.$

(3) $2 \sin A = -\sqrt{1+\sin 2A} + \sqrt{1-\sin 2A}.$

(4) $2 \sin \frac{A}{2} = \sqrt{1+\sin A} + \sqrt{1-\sin A}.$

(5) $2 \cos \frac{A}{2} = \sqrt{1+\sin A} - \sqrt{1-\sin A}.$

அதிகாரம் 13

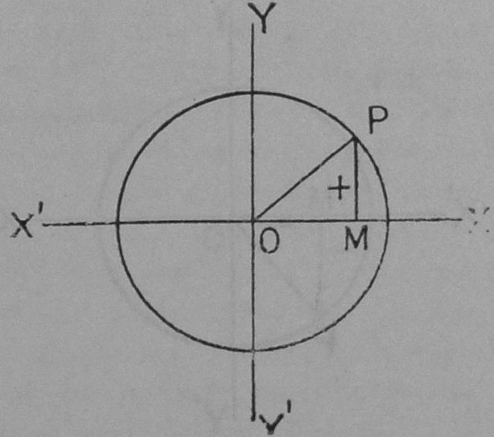
கோண கணித சார்பலங்களது கோட்டுப்படங்கள் அல்லது வளைவரைகள்

(Graphs of Trigonometrical Functions)

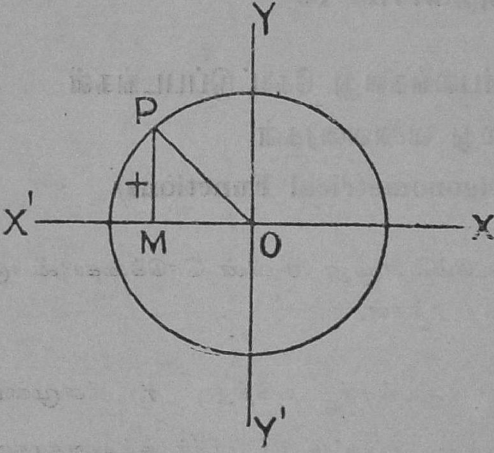
145. θ தொடர்ந்து கூடும்பொழுது θ-வின் நெடுக்கையின் குறியிலும் பருமனிலும் எற்படும் மாறுதல்கள்.

XOX', **YOY'** நேர் ஆயங்கள் எடுத்து, r நீளமுடைய **OP** என்னும் கோடு **OX**-லிருந்து புறப்பட்டு இடமாகச் சுற்றுவதாகவும், $XOP = \theta$ ஆகவும் கொள்வோம். அப்பொழுது $\sin\theta = \dfrac{\text{P-யின் } y \text{ ஆயத்தொலை}}{OP}$ என்று வரையறுத்தோம். **OP** எட்பொழுதும் மிகைக்கணியமாக இருப்பதால் **sin** θ-வின் குறி **P**-யின் y ஆயத்தொலையின் குறியே.

θ சுன்னத்திலிருந்து
90°க்குத்
தொடர்ந்து கூடும்பொழுது
P முதல் கால் வட்டத்தில்
இருப்பதால்
அதன் y ஆயத்தொலை
மிகைக்கணியமாகவும்
0-லிருந்து **OP**-க்குத்
தொடர்ந்து கூடிக்கொண்டும்
போகின்றது.
ஆகவே
sin θ-வின் மதிப்பு
மிகைக்கணியமாகவும்,
சுன்னத்திலிருந்து ஒன்றுக்குத்
தொடர்ந்து
கூடிக்கொண்டும் போகிறது.

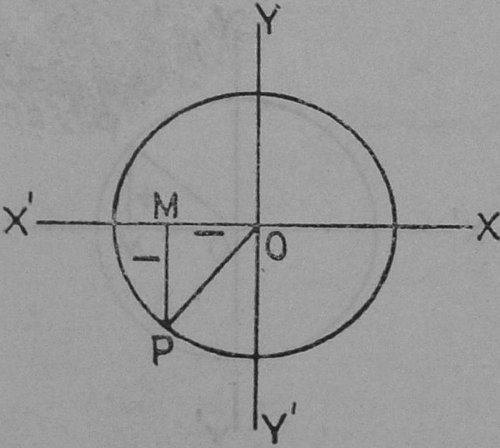


படம் 119



படம் 120

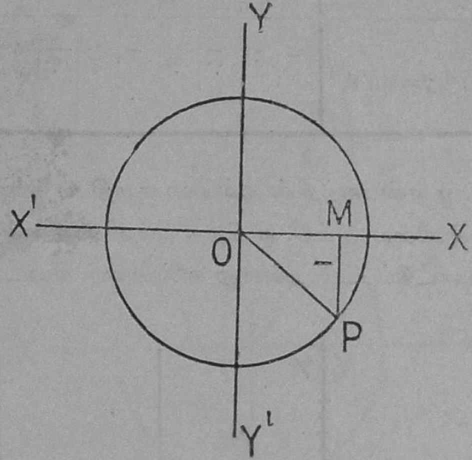
90°-லிருந்து 180°-க்கு
θ கூடும்பொழுது
P இரண்டாவது கால் வட்டத்தில் இருப்பதால்
அதன் y ஆயத்தொலை
மிகைக்கணியமாகவும்,
OP-லிருந்து
சுன்னத்திற்குக்
குறைந்துகொண்டும்
வருகிறது.
ஆகவே
sin θ-வின் மதிப்பு
மிகைக்கணியமாகவும்
ஒன்றிலிருந்து
சுன்னத்திற்குக் குறைந்து
கொண்டும் வருகிறது.



படம் 121

180°-லிருந்து 270°க்கு
θ கூடும்பொழுது
P மூன்றாவது கால் வட்டத்தில் இருப்பதால்
P-யின் y ஆயத்தொலை
குறைகணியமாகவும்,
சுன்னத்திலிருந்து
– OP-க்குக்
குறைந்துகொண்டும்
வருகிறது.
ஆகவே
sin θ-ன் மதிப்பு
குறைக்கணியமாகவும்,
சுன்னத்திலிருந்து
– 1-க்குக்
குறைந்துகொண்டும்
வருகிறது.

270°-லிருந்து
360°க்கு
θ கூடும்பொழுது
P நான்காவது
கால் வட்டத்தில்
இருப்பதால்
P-ன்
y ஆயத்தொலை
குறைக்கணியமாகவும்,
− OP-லிருந்து
சுன்னத்திற்குக்
கூடிக்கொண்டும்
போகிறது.
ஆகவே
sin θ-வின் மதிப்பு
குறைக்கணியமாகவும்
− 1-லிருந்து
சுன்னத்திற்குக்
கூடிக்கொண்டும்
போகிறது.



படம் 122

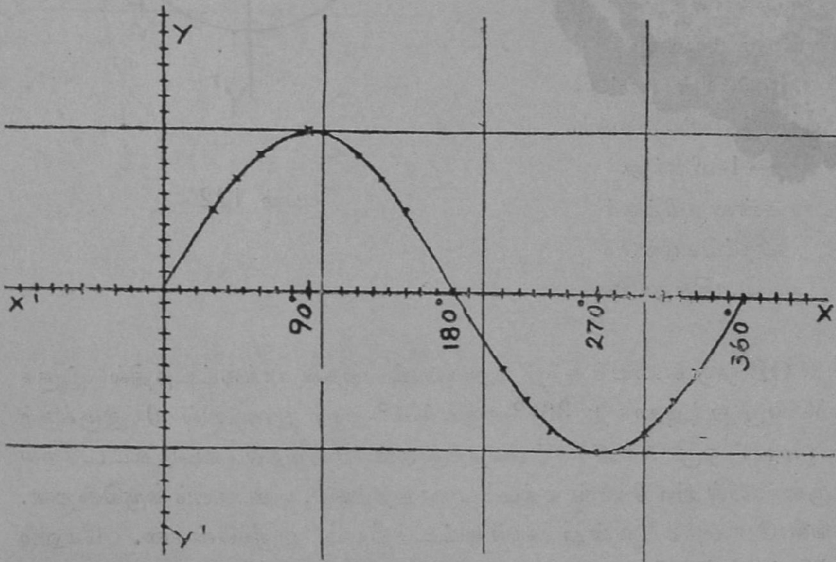
OP ஒரு வளையம் சுற்றி மறுபடியும் முதல் கால்வட்டத்தில் இருக்கும்பொழுது (அதாவது 360°-க்கும் 450°-க்கும் இடையில் θ இருக்கும் பொழுது) ஒரு சுற்று சுற்றுவதற்குமுன் θ முதல் கால் வட்டத்தில் இருக்கையில் **sin** θ-வின் ஏற்பட்ட மாறுதல்கள், மறுபடியும் வருகின்றன. இவ்வாறே மற்ற மூன்று கால் வட்டத்திலும் இருக்கின்றன. மேலும் 360°-க்கும் 720°-க்கும் அல்லது 720°-க்கும் 1080°-க்கும் இடையில் θ இருக்கும்பொழுது, 0°-க்கும் 360°-க்கும் இடையில் θ இருக்கையில் **sin** θ-வில் ஏற்பட்ட மாறுதல்கள் மறுபடியும் வருகின்றன. ஆகவே **sin** θ-வின் மதிப்பும் குறியும் ஒரே முறையாகத் திரும்பத்திரும்ப வருவதால் இதனை போழ்தில் மீளும் சார்பலன் **(periodic function)** என்று கூறப்படும். இதன் போழ்து **(period)** 360° அல்லது 2π ஆகும்.

146. sin θ-வின் வளை வரை வரைதல்:— $y = \sin \theta$ எனக்கொள்வோம். θ-விற்குப் பல மதிப்புகள் கொடுத்து அவற்றிற்கு நேர் நிலையான

y-ன் மதிப்புகளைக் கண்டு, அவற்றைக் கீழ் காட்டியபடி அட்டவணையில் குறிக்கலாம்.

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$y=\sin\theta$	0	·5	·71	·87	1	·87	·71	·5	0	−·5	−·71	−·87	−1	−·87	−·71	−·5	0

θ, y என்பவற்றின் ஒவ்வொரு மதிப்பு இணைகளையும் ஆயங்களாய்கொண்ட புள்ளியை இட்டு, குறித்த புள்ளிகளை எல்லாம் இணைத்தால் **sin** θ-வின் கோட்டுப்படம் அல்லது வளைவரை கிடைக்கும்.



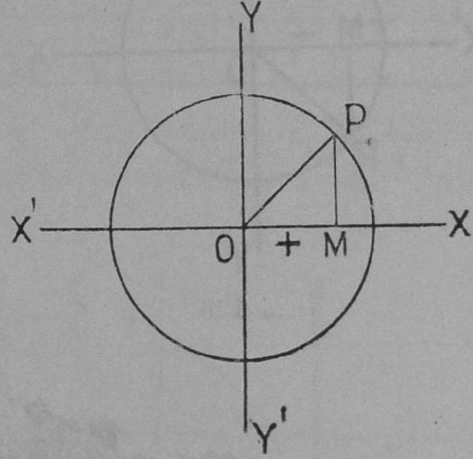
படம் 123

θ-வோடு 360°ஐ கூட்டவோ, கழிக்கவோ செய்தால் y-ன் மதிப்பில் மாறுதலில்லை. ஆகவே கோட்டுப் படத்தில் ஒரு புள்ளியை வலது பக்கத்திலோ, இடது பக்கத்திலோ 360°ஐ குறிக்கும் தொலை அகற்றினால், அது கோட்டுப் படத்தில் வேறொரு புள்ளியோடு ஒன்றுபடும். அதே மாதிரி கோட்டுப் படத்தில் ஒரு பகுதியை வலது பக்கமோ இடது பக்கமோ 360° அகற்றினால் கோட்டுப் படத்தின் வேறொரு பகுதியோடு ஒன்றுபடும், ஆகவே **sin** θ-வின் வளைவரையில் 0°-க்கும்

360°-க்கும் இடையிலுள்ள வீச்சியிலிருக்கிற (range) வரைவளையைப் போல் வலது பக்கமும் இடது பக்கமும் எண்ணற்றவை அடங்கியிருக்கின்றன.

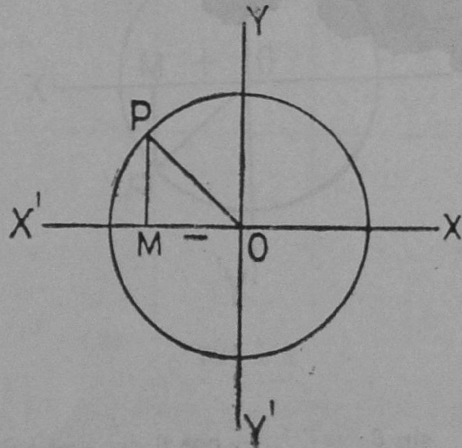
147. θ தொடர்ந்து கூடும்பொழுது θ-வின் கிடக்கையின் குறியிலும் பருமனிலும் ஏற்படும் மாறுதல்கள்.

θ சுன்னத்திலிருந்து 90°-க்குத் தொடர்ந்து கூடும்பொழுது **P** முதல் கால்வட்டத்தில் இருப்பதால் அதன் x ஆயத்தொலை மிகைக்கணியமாகவும், **OP**-லிருந்து **0**-க்குக்குறைந்து கொண்டும் வருகிறது. ஆகவே **cos** θ-வின் மதிப்பு மிகைக்கணியமாகவும், ஒன்றிலிருந்து சுன்னத்திற்குக் குறைந்துகொண்டும் போகிறது.

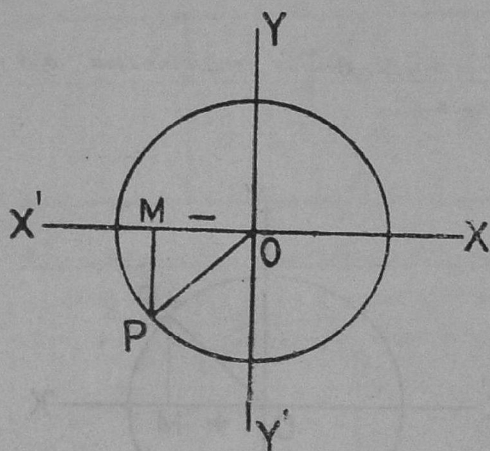


படம் 124

90°-லிருந்து 180°-க்கு θ கூடும்பொழுது **P** இரண்டாவது கால்வட்டத்தில் இருப்பதால் அதன் x ஆயத்தொலை குறைக்கணியமாகவும், **0**-லிருந்து **−OP**-க்குக் குறைந்துகொண்டும் வருகிறது. ஆகவே **cos** θ-வின் மதிப்பு குறைக்கணியமாகவும், 0-லிருந்து 1க்குக் குறைந்துகொண்டும் வருகிறது.

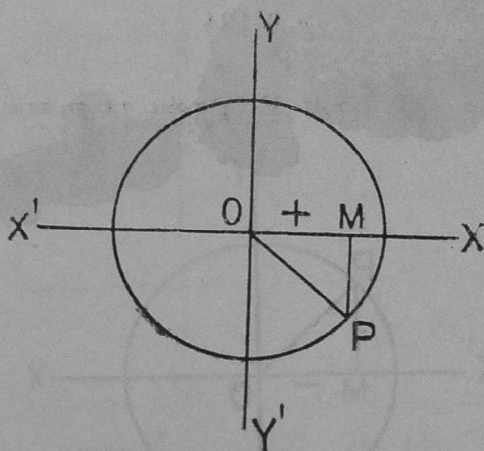


படம் 125



படம் 126

180°-லிருந்து 270°-க்கு
θ கூடும்பொழுது
P மூன்றாவது
கால் வட்டத்தில்
இருப்பதால்
P-யின்
x ஆயத்தொலை
குறைக்கணியமாகவும்,
– OP-லிருந்து **0**-க்குக்
கூடிக்கொண்டும்
போகிறது.
ஆகவே
cos θ-வின் மதிப்பு
குறைக்கணியமாகவும்,
– லிருந்து **0**-க்குக்
கூடிக்கொண்டும்
போகிறது.



படம் 127

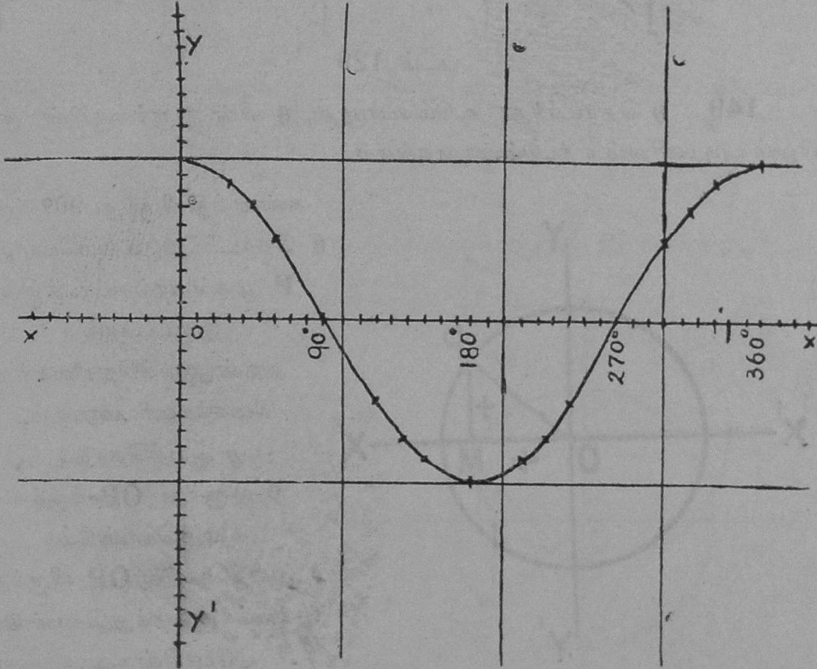
270°-லிருந்து 360°-க்கு
θ கூடும்பொழுது
P நான்காவது கால்வட்டத்
தில் இருப்பதால்
P-ன் x ஆயத்தொலை
மிகைக்கணியமாகவும்,
0-லிருந்து **OP**-க்குக் கூடிக்
கொண்டும் போகிறது.
ஆகவே **cos** θ-வின் மதிப்பு
மிகைக்கணியமாவும்
0-லிருந்து 1-க்குக் கூடிக்
கொண்டும் போகிறது.

sin θ-வைப்போல் **cos** θ-வும் போழ்தில் மீளும் சார்பலன் என்றும் அதன் போழ்து 360° அல்லது 2π என்றும் எளிதிற் விளங்கும்.

148. cos θ-வின் வளைவரை வரைதல் :— $y = \cos\theta$ எனக்கொள்வோம். θ-விற்குப் பல மதிப்புகள் கொடுத்து அவற்றிற்கு நேர்நிலையான y-ன் மதிப்புகளைக் கண்டு, அவற்றைக் கீழ்க் காட்டியபடி அட்டவணையில் குறிக்கலாம்.

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$y = \cos\theta$	1	·87	·71	·5	0	·5	−·71	−·87	−1	−·87	−·71	−·5	n	·5	·71	·87	1

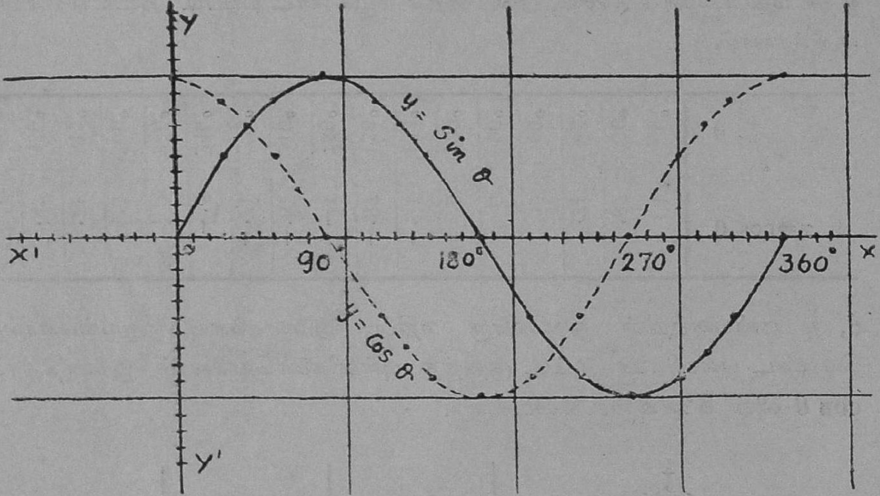
θ, y என்பவற்றின் ஒவ்வொரு மதிப்பு இணைகளையும் ஆயங்களாய்க் கொண்ட புள்ளிகளை இட்டு, குறித்த புள்ளிகளையெல்லாம் இணைத்தால் **cos** θ-வின் வளைவரை கிடைக்கும்.



படம் 128

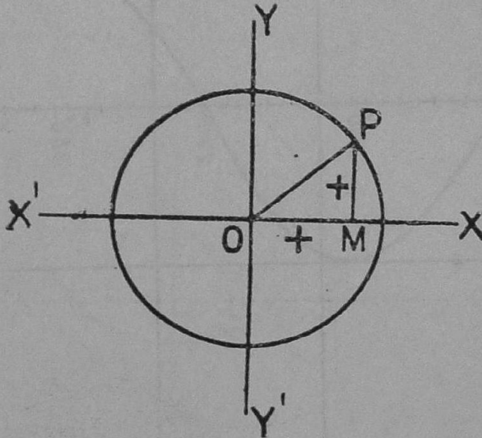
sin θ-வைப்போல், **cos** θ-வின் வளைவரையில், 0°-க்கும் 360°-க்கும் இடையிலுள்ள வளைவரையைப்போல், வலது பக்கமும் இடது பக்கமும் எண்ணற்றவை அடங்கியிருக்கின்றன. மேலும் **sin** θ-வின் வளை

வரையை 90° இடது பக்கம் அகற்றினல் **cos** θ-வின் வளைவரை கிடைக்கிறது என்பது கவனிக்கத்தக்கது.



படம் 129

149. θ தொடர்ந்து கூடும்பொழுது θ-வின் இருக்கையின் குறியிலும் பருமனிலும் எற்படும் மாறுதல்கள்.



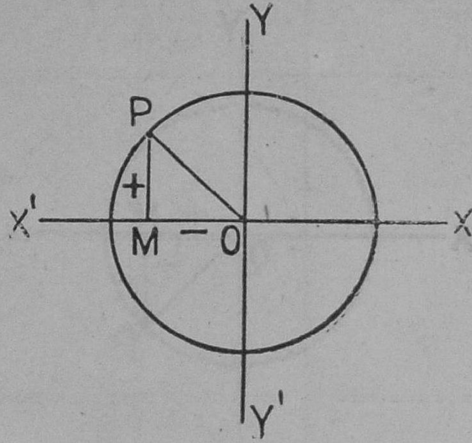
படம் 130

சுன்னத்திலிருந்து 90°-க்கு θ தொடர்ந்து கூடும்பொழுது **P** முதல் கால்வட்டத்தில் இருப்பதால் அதன் ஆயத்தொலைகள் மிகைக்கணியமாகவும், y ஆயத்தொலை 0-விருந்து **OP**-க்குக் கூடிக்கொண்டும் x ஆயத்தொலை **OP**-லிருந்து 0-க்குக் குறைந்துகொண்டும் போகின்றன.

$$\tan\theta = \frac{y \text{ ஆயத்தொலை}}{x \text{ ஆயத்தொலை}}.$$

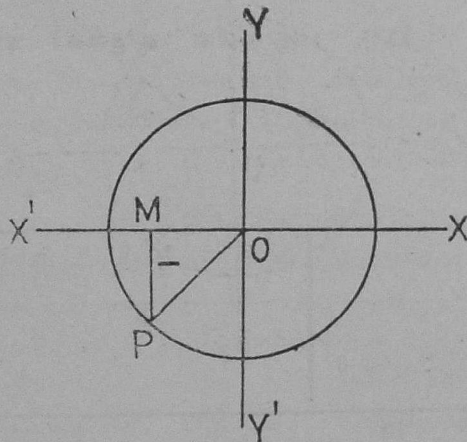
ஆகவே **tan** θ மிகைக்கணியமாகவும், சுன்னத்திலிருந்து பொன்னம்பேரெண்ணுக்குக் கூடிக்கொண்டும் போகிறது. $\theta = 90^\circ$ ஆக இருக்கும்பொழுது $\tan\theta = \infty$.

90°-லிருந்து 180°-க்கு θ கூடும்பொழுது P இரண்டாவது கால் வட்டத்தில் இருப்பதால் அதன் x ஆயத்தொலை குறைக்கணியமாகவும் y ஆயத்தொலை மிகைக்கணியமாகவும் இருக்கின்றன. மேலும் x ஆயத்தொலை 0-லிருந்து − OP-க்குக் குறைந்துகொண்டும், y ஆயத்தொலை OP-லிருந்து 0-க்குக் குறைந்துகொண்டும் இருக்கின்றன. ஆகவே tan θ குறைக் கணியமாகவும், − ∞-லிருந்து 0-க்குக் கூடிக்கொண்டும் போகிறது.



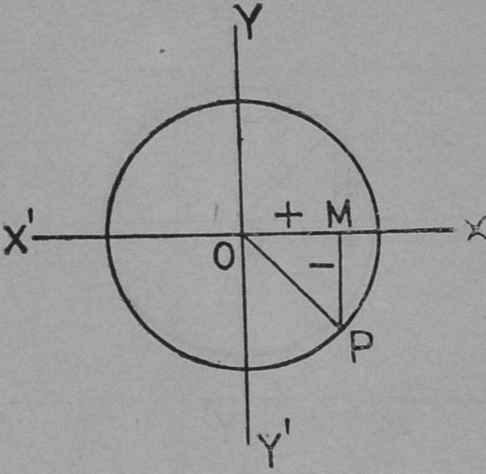
படம் 131

180°-லிருந்து 270°-க்கு θ கூடும்பொழுது P மூன்றாவது கால் வட்டத்தில் இருப்பதால் அதன் ஆயத்தொலைகள் குறைக்கணியங்களாக இருக்கின்றன. மேலும் x ஆயத்தொலை − OP-லிருந்து 0-க்குக் கூடிக்கொண்டும், y ஆயத்தொலை 0-லிருந்து − OP-க்குக் குறைந்துகொண்டும் போகின்றன. ஆகவே tan θ மிகைக்கணியமாகவும், சுன்னத்திலிருந்து + ∞க்குக் கூடிக்கொண்டும் போகிறது.



படம் 132

270°-லிருந்து 360°-க்கு θ கூடும்பொழுது **P** நான்காவது கால் வட்டத்தில் இருப்பதால் அதன் x ஆயத்தொலை மிகைக்கணியமாகவும், சுன்னத்திலிருந்து **OP**-க்குக் கூடிக்கொண்டும், அதன் y ஆயத்தொலை குறைக்கணியமாகவும், **−OP**-லிருந்து 0-க்குக் கூடிக்கொண்டும் போகின்றன. ஆகவே **tan** θ குறைக்கணியமாகவும், −∞லிருந்து சுன்னத்திற்குக் கூடிக்கொண்டும் போகிறது.



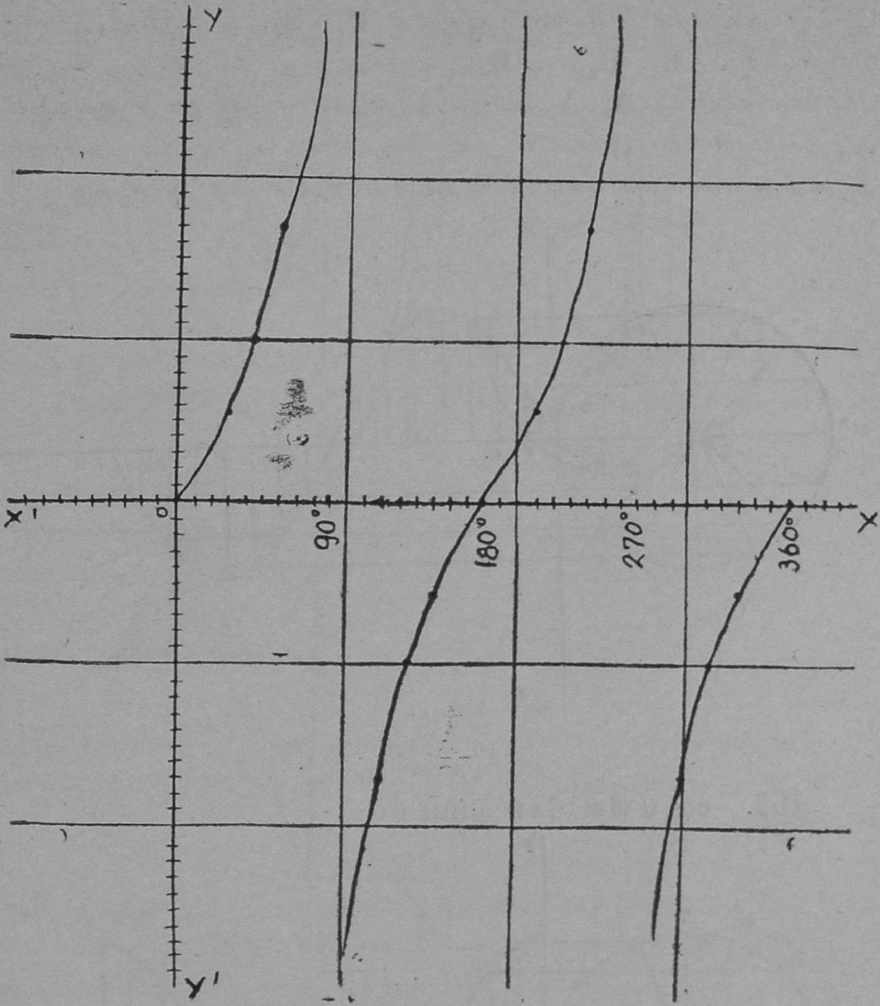
படம் 133

sin θ, **cos** θ என்பவற்றைப்போல் **tan** θ போழ்தில் மீளும் சார்பலன் என்றும், அதன் போழ்து 180° அல்லது π என்றும் எளிதிற் காணலாம்.

150. tan θ-வின் வளைவரை வரைதல் :— $y = \tan\theta$ எனக் கொள்வோம். θ-விற்குப் பல மதிப்புகள் கொடுத்து அவற்றிற்கு நேர் நிலையான y-ன் மதிப்புகளைக் கண்டு அவற்றைக் கீழ் காட்டியபடி அட்டவணையில் குறிக்கலாம்.

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$y = \tan\theta$	0	·58	·1	1·7	∞	−1·7	−1	−·58	0	·58	1	1·7	∞	−1·7	−1	−·58	·0

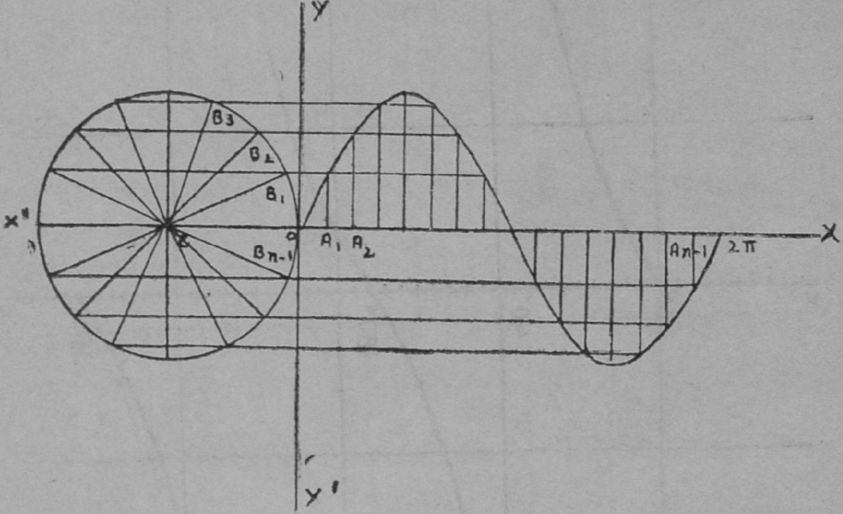
θ, y என்பவற்றின ஒவ்வொரு மதிப்பு இணைகளையும் ஆயங்களாய்க் கொண்ட புள்ளிகளை இட்டு, குறித்த புள்ளிகளை எல்லாம் இணைத்தால் **tan** θ-வின் வளைவரை கிடைக்கும்.



படம் 134

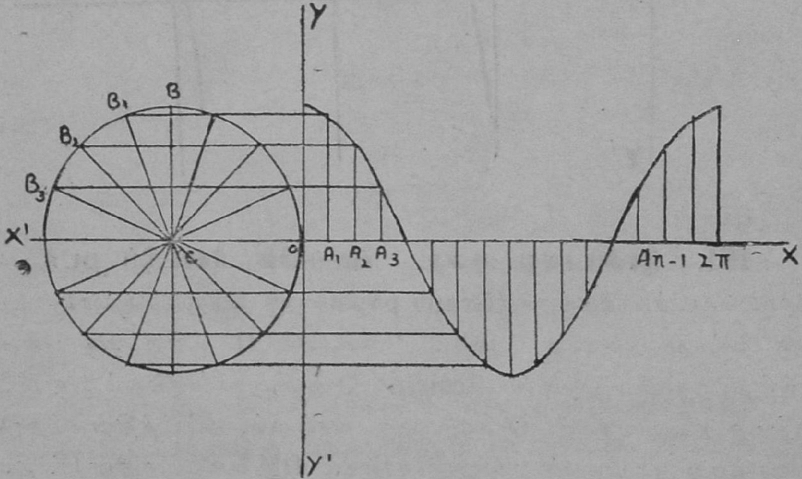
151. இரண்டாவது முறை. sin θ-வின் கோட்டுப் படம் :— கோட்டுப்படக் காகிதத்தில் (**Graph paper**) ஒரு அங்குலம் ஆரையுடைய ஒரு வட்டம் வரைந்து அவ்வட்ட வரையில் **O** என்ற ஒரு புள்ளி எடுத்து அதனை ஆதியாகவும் (**origin**), **O** வழியாகச் செல்லும் ஒரு விட்டத்தை x ஆயமாகவும், **O** வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தின் தொடு வரையை y ஆயமாகவும் எடுத்துக்கொள்க. **OM** = வட்டத்தின் சுற்றளவாக இருக்கும்படி x ஆயத்தில் **M** என்ற புள்ளியை எடுத்து **OM**-ஐ n சம பங்காகப் பிரிக்க. அப்புள்ளிகள் A_1, A_2,.........A_{n-1}, A_n எனக் கொள்வோம். அதே மாதிரி வட்டவரையையும் n சம பங்குகளாகப்

பிரிக்க, அவ்விதம் பிரிக்கும் புள்ளிகள் B_1, B_2,........B_{n-1} எனக் கொள்வோம். B_1, B_2,.....B_{n-1}-லிருந்து x ஆயத்திற்கு ஒரு போகுக் கோடுகள் வரைந்து A_1, A_2,........A_n வழியாகச் செல்லும் x ஆயத்தின் குத்துக்கோடுகளை முறையே வெட்டும் புள்ளிகளை இட்டு, அவற்றை இணைத்து வளைவரை வரைந்தால் **sin** θ-வின் வளைவரை கிடைக்கும்.



படம் 135

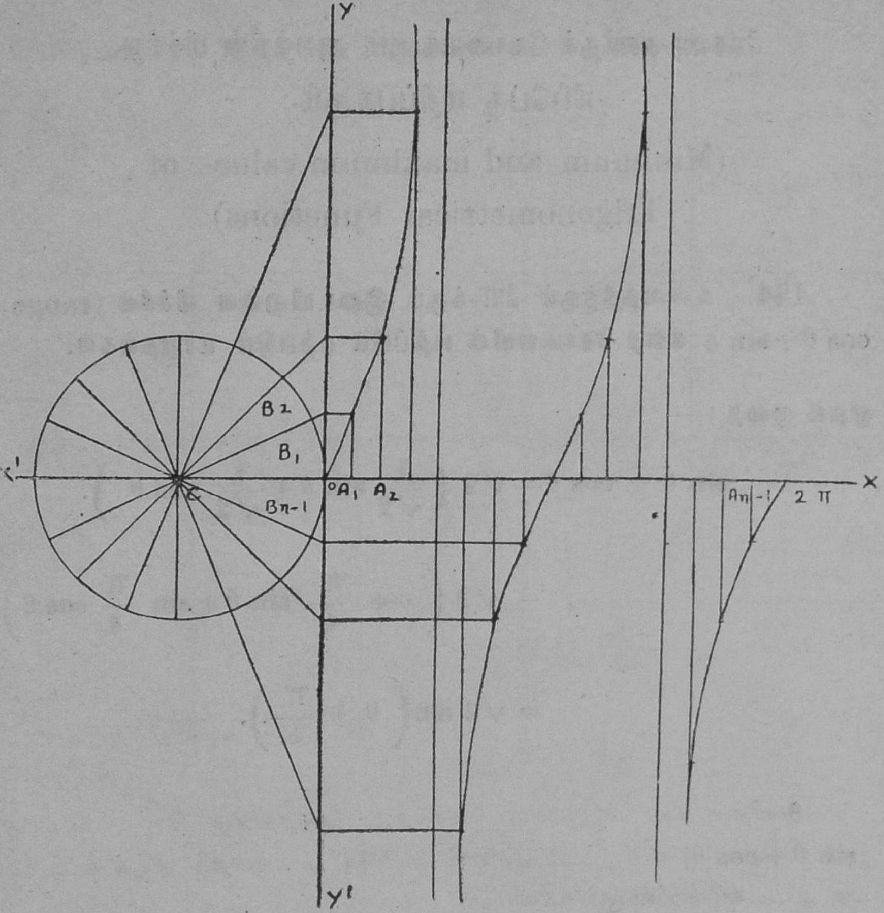
152. cos θ-வின் கோட்டுப்படம்.



படம் 136

வட்டவரையைச் சம பங்குகளாகப் பிரிக்கும் புள்ளிகள் B-லிருந்து தொடங்குவதாகக் கொள்க.

153. tan θ-வின் கோட்டுப்படம்.



படம் 137

CB_1, CB_2,.........y ஆயத்தை வெட்டும் புள்ளிகளிலிருந்து x ஆயத்திற்கு ஒரு போகுக்கோடுகள் வரைந்து அவை A_1, A_2, ...A_n வழியாகச் செல்லும் x ஆயத்தின் குத்துக்கோடுகளை முறையே வெட்டும் புள்ளிகளை இணைக்கவும்.

குறிப்பு :—கோண கணிதத் தகவுகளின் வளைவரைகளை வரைய இம்முறையைக் கையாண்டால், θ-வின் மதிப்பிற்கு நேர்நிலையான கோண கணிதத் தகவுகளின் மதிப்புகள் தெரியவேண்டிய அவசியமில்லை.

இவ்வாறே **cosec θ, sec θ, cot θ** என்பவற்றின் வளைவரைகளும் வரையலாம்.

கோண கணிதக் கோவைகளும் அவற்றின் மீச்சிறு, மீப்பெரு மதிப்புகளும்.

(Minimum and maximum values of Trigonometrical Functions)

154. சுன்னத்திற்கும் 2π-க்கும் இடையிலுள்ள வீச்சில் (range) $\cos\theta+\sin\theta$ என்ற கோவையின் மதிப்பில் ஏற்படும் மாறுதல்கள்.

முதல் முறை :—

$$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right).$$

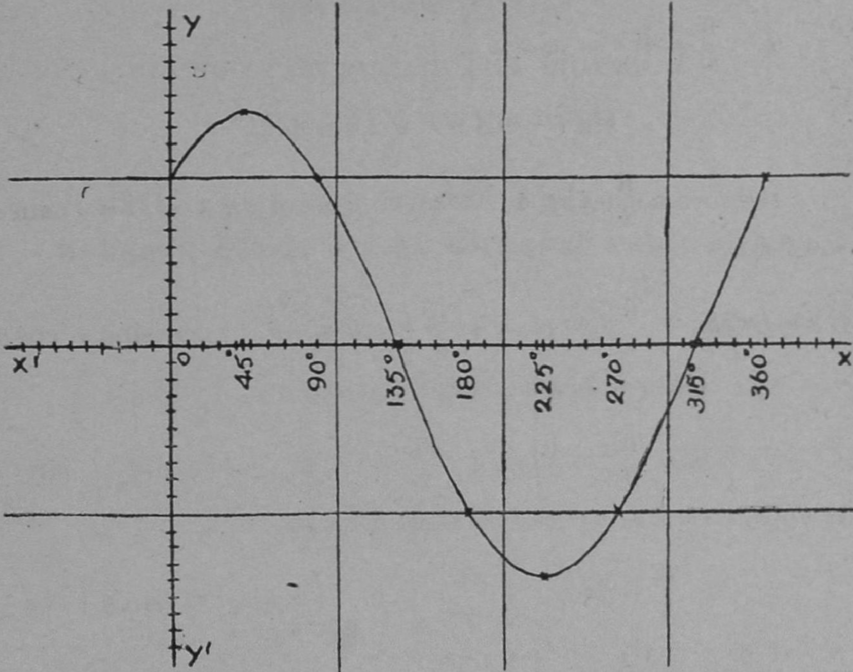
$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin\theta+\sin\frac{\pi}{4}\cos\theta\right)$$

$$=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right).$$

θ-விற்கு பல மதிப்புகள் கொடுத்து அவற்றிற்கு நேர் நிலையான $(\sin\theta+\cos\theta)$-வின் மதிப்புகளைக் கண்டு, அவற்றைக் கீழ்க் காட்டிய படி அட்டவணையில் குறிக்கலாம்.

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\theta+\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π	$\frac{9\pi}{4}$
$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$y=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$	1	$\sqrt{2}$	1	0	-1	$-\sqrt{2}$	-1	0	1

(θ, y) என்பவற்றின் ஒவ்வொரு மதிப்பு இணைகளையும் ஆயங்களாய் கொண்ட புள்ளிகளை இட்டு அவற்றை இணைத்தால் **sin** θ **+ cos** θ-வின் வளைவரை கிடைக்கும்.



படம் 138

வளைவரையிலிருந்து பின் வருவனவற்றை எளிதிற் காணலாம்.

0-விலிருந்து $\frac{\pi}{4}$-க்கு θ கூடும்பொழுது $(\sin\theta + \cos\theta)$, 1-லிருந்து $\sqrt{2}$-க்கு கூடிக்கொண்டே போகிறது.

$\frac{\pi}{4}$-விலிருந்து $\frac{5\pi}{4}$-க்கு θ கூடும்பொழுது $(\sin\theta + \cos\theta)$ $\sqrt{2}$-விருந்து $-\sqrt{2}$-க்கு குறைந்துகொண்டே போகிறது.

$\frac{5\pi}{4}$-விலிருந்து 2π-க்கு θ கூடும்பொழுது $(\sin\theta + \cos\theta)$ $-\sqrt{2}$-விருந்து 1-க்கு கூடிக்கொண்டு போகிறது.

மேலும் **sin** θ **+ cos** θ-வின் மீப்பெரு மதிப்பு $= \sqrt{2}$

,, -வின் மீச்சிறு மதிப்பு $= -\sqrt{2}$.

இரண்டாவது முறை :—

$$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

$\theta+\frac{\pi}{4}=\phi$ எனக்கொள்வோம்.

அப்பொழுது $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\phi$.

0-விருந்து $\frac{\pi}{2}$-க்கு ϕ கூடும்பொழுது 0-விருந்து 1-க்கு $\sin\phi$ கூடுகிறது.

ஆகவே $-\frac{\pi}{4}$-விருந்து $+\frac{\pi}{4}$-க்கு θ கூடும்பொழுது$(\sin\theta+\cos\theta)$, 0-விருந்து $\sqrt{2}$-க்கு கூடிக்கொண்டு போகிறது.

இவ்வாறே $\frac{\pi}{2}$-விருந்து $+\frac{3\pi}{2}$-க்கு ϕ கூடும்பொழுது $\sin\phi$ 1-விருந்து -1-க்கு குறைந்துகொண்டு வருகிறது.

ஆகவே $\frac{\pi}{4}$-விருந்து $+\frac{5\pi}{4}$-க்கு θ கூடும்பொழுது $(\sin\theta+\cos\theta)$, $\sqrt{2}$-விருந்து $-\sqrt{2}$-க்கு குறைந்துகொண்டு வருகிறது.

இவ்வாறே $\frac{5\pi}{4}$-க்கும் 2π-க்கும் இடையிலுள்ள வீச்சில் $(\sin\theta+\cos\theta)$-வின் மாறுதல்களையும் காணலாம்.

$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$-வின் மீப்பெரு மதிப்பு$=1$.

ஆகவே $\sin\theta+\cos\theta$-வின் மீப்பெரு மதிப்பு$=\sqrt{2}$.

$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$-வின் மீச்சிறு மதிப்பு$=-1$.

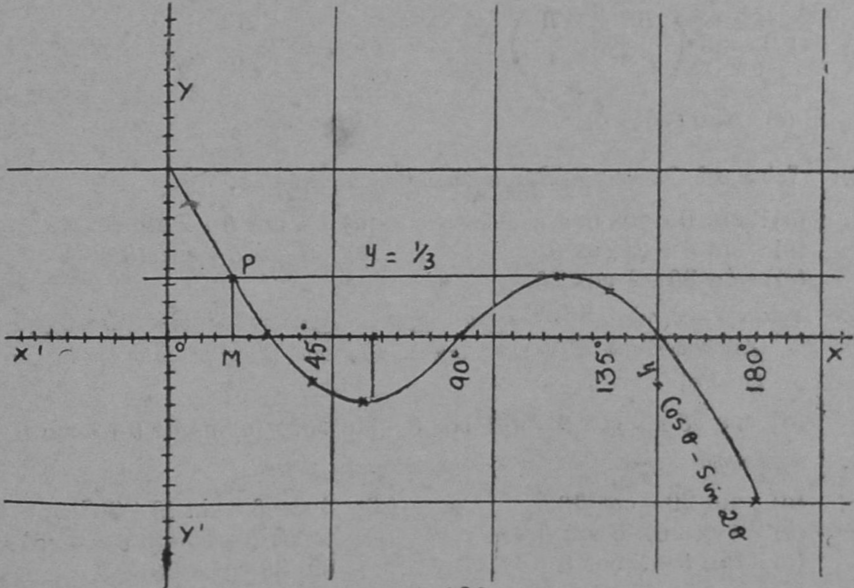
ஆகவே $\sin\theta+\cos\theta$-வின் மீச்சிறு மதிப்பு $=-\sqrt{2}$.

பயிற்சி 1. θ-வின் மதிப்பு $0°$-க்கும், $180°$-க்கும் இடையில் இருக்கும்பொழுது $\cos\theta-\sin 2\theta$-வின் வளைவரை வரைந்து $(0°, 90°)$ வீச்சிலிருக்கும் மீச்சிறு மதிப்பினைக் காண்க. அவ் வளைவரையால் $\cos\theta=\frac{1}{3}+\sin 2\theta$-வின் தீர்வைக் காண்க.

$y = \cos\theta - \sin 2\theta$ எனக் கொள்வோம். θ-வுக்கு பல மதிப்புகள் கொடுத்து அவற்றிற்கு நேர்கிலேயான y-ன் மதிப்புகளைக் கண்டு அவற்றைக் கீழே காட்டியபடி அட்டவணையில் குறிக்கலாம்.

θ	0	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$-\sin 2\theta$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$+1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
$\cos\theta - \sin 2\theta$	1	0	$-1+\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	$1-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	-1
y	1	0	$-\cdot 29$	$-\cdot 37$	0	$\cdot 37$	$\cdot 29$	0	-1

ஆகவே y-ன் வளைவரையை வரையலாம்.



படம் 139

வளைவரையிலிருந்து 0°-க்கும் 90°-க்கும் இடையிலுள்ள வீச்சிலிருக்கும் y-ன் மீச்சிறு மதிப்பு $\cdot 36$ என்று காணலாம். அந்த மதிப்பு இருக்கையில் θ-வின் மதிப்பு $62\frac{1}{2}°$ என்று காணலாம்.

$$\cos\theta = \tfrac{1}{3} + \sin 2\theta.$$
$$\cos\theta - \sin 2\theta = \tfrac{1}{3}.$$

ஆகவே இச்சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $y=\cos\theta-\sin 2\theta$, $y=\frac{1}{3}$ என்ற வளைவரைகள் வெட்டும் புள்ளிகளிலிருந்து அறியலாம். $y=\frac{1}{3}$ என்ற கோட்டை வரைக. அது வளைவரையை **P**-ல் வெட்டுகிறதெனக் கொள்வோம். **P**-லிருந்து x ஆயத்திற்கு **PM** என்ற குத்துக்கோட்டை வரைந்தால் **OM** = சமன்பாட்டின் 0°-க்கும், 90°-க்கும் இடையிலுள்ள தீர்வாகும்.

$$OM = 19^\circ - 30' \text{ (அண்ணளவாக)}$$

ஆகவே சமன்பாட்டின் அண்ணளவான பொதுப்படைத்தீர்வு $= n\times 360^\circ + 19^\circ - 30'$.

பயிற்சிகள் 37

1. பின்வரும் சார்பலன்களது போழ்துகளைக் காண்க.

(a) $\sin 2x$.

(b) $\cos 3x$.

(c) $\sin \sqrt{p}x$.

(d) $\sin\left(\frac{\pi}{p}x+\frac{\pi}{4}\right)$

(e) $\tan(px+q)$.

(f) $\cos\left(2\pi px-\frac{\pi}{2}\right)$

(g) $\cos 2\pi x$.

(h) $\operatorname{cosec}\left(2\pi x+\frac{\pi}{3}\right)$

(i) $\cot\frac{\pi x}{6}$.

(j) $\sec\frac{x}{2}$.

2. பின்வரும் கோவைகளின் வளைவரைகளை வரைக.

(a) $\sin\theta-\cos\theta$.

(b) $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$.

(c) $\sin 3\theta-\frac{1}{2}\cos 2\theta$.

(d) $4\cos\theta+7\sin\theta$.

(e) $5\cos\theta+\sin 4\theta$.

3. சுன்னத்திற்கும் 360°-க்கும் இடையிலுள்ள வீச்சில் பின்வரும் கோவைகளில் மீப்பெரு மதிப்புகளையும் மீச்சிறு மதிப்புகளையும் காண்க.

(a) $\cos 3\theta+2\cos\theta$. (b) $\cos\theta-\sin 2\theta$. (c) $a\cos\theta+b\sin\theta$.

4. பின்வரும் சமன்பாடுகளை வளைவரையால் விடுவி.

(a) $\sin 2\theta=\cos 3\theta$.

(b) $4\cos\theta+3\sin\theta=4$.

(c) $\tan\theta+2\cot\theta=3\frac{3}{4}$.

(d) $3\sin\theta=\sin(\theta+36^\circ)$.

(e) $8\cos\theta+15\sin\theta=-\cdot 51$.

(f) $\sin 3\theta-\cos 2\theta=\cdot 4$.

5. θ-வின் மதிப்பு சுன்னத்திற்கும் 360°-க்கும் இடையிலிருக்கும் பொழுது $3\sin\theta+ı\cos\theta$-வின் வளைவரை வரைந்து, அவ் வீச்சில் அகமுள்ள சார்பலனது மீப்பெரு மதிப்பைக் காண்க. வளைவரையைப் பயன்படுத்தி $3\sin\theta+4\cos\theta=2$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

விடைகள்

பயிற்சிகள் 1 (பக்கம் 5)

1. $\frac{\pi}{6}$, $\frac{4\pi}{9}$, $\frac{49\pi}{180}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{35\pi}{36}$, $\frac{5\pi}{12}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{12}$, $\frac{2\pi}{15}$, $\frac{\pi}{8}$.

2. $90°$, $33\frac{3}{4}$, $180n°$, $60°$, $120°$, $450°$, $630°$, $210°$, $150°$.

பயிற்சிகள் 4 (பக்கம் 18)

1. $\sin\theta = \frac{4}{5}$, $\tan\theta = \frac{4}{3}$, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{5}{4}$, $\sec\theta = \frac{5}{3}$, $\cot\theta = \frac{3}{4}$.
2. $\cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $\operatorname{cosec}\theta = 3$, $\sec\theta = \frac{3}{2\sqrt{2}}$, $\cot\theta = 2\sqrt{2}$.
3. $\sec A = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\cot A = \sqrt{3}$; 4. $\sin\theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\cot\theta = \frac{1}{\sqrt{15}}$;
6. $\cos A = \frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$, $\operatorname{cosec} A = \frac{p^2+q^2}{2pq}$; 7. 3; 8. $\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$; 9. $\frac{3}{4}$;
10. $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$.

பயிற்சிகள் 5 (பக்கம் 25)

1. $4\frac{1}{3}$; 2. 1; 3. 0; 4. $\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$; 5. 5; 6. $\frac{3}{2}$; 7. $2\frac{1}{3}$; 8. 11; 9. $1\frac{7}{12}$; 10. $2\frac{1}{24}$.

பயிற்சிகள் 7 (பக்கம் 34)

1. 173·2 அடி; 2. 60°; 3. 50 அடி, 100 அடி; 4. 22·5 அடி, 38·97 அடி; 5. 86·6 அடி; 6. 46·19 அடி; 7. 273·2 அடி; 8. 70·98 அடி; 9. 59 அடி, 15 அடி; 10. ·8318 மைல்; 11. 512·4; 12. 900 அடி; 13. 831·36 அடி; 14. 64 அடி; 15. 565·6 அடி, 1131·2 அடி; 16. 3·464 மைல், 6 மைல்; 17. மணிக்கூருக்கு 10 மைல்; 18. 349·36 மைல்; 19. மணிக்கூருக்கு 5·196 மைல், 18 மைல்; 20. 10 மைல்; 24. 14 மைல்.

பயிற்சிகள் 8 (பக்கம் 53)

1. $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 2. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3. $-\frac{1}{2}$; 4. $-\sqrt{2}$; 5. $-\frac{1}{2}$; 6. $-\frac{1}{2}$
7. -1; 8. $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 9. 2; 10. 1; 11. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 12. $\frac{2}{\sqrt{3}}$; 13. $\frac{2}{\sqrt{3}}$;
14. $-\sqrt{2}$; 15. $\sqrt{3}$; 16. $\sin 40^\circ$, $-\sin 30^\circ$, $\cot 10^\circ$, $-\tan 30^\circ$, $\operatorname{cosec} 30^\circ$, $\sec 30^\circ$, $-\cos 30^\circ$, $\sin 30^\circ$, $\cos 45^\circ$, $\cot 30^\circ$, $-\cot 45^\circ$, $-\cot 30^\circ$, $\sec 45^\circ$, $\sin 30^\circ$, $\cos 30^\circ$; 17. $-\sin A$, $\cot A$, $-\cos A$, $-\cot A$, $-\operatorname{cosec} A$, $-\operatorname{cosec} A$; 18. $\sin A = \frac{21}{29}$, $\tan A = -\frac{21}{20}$;
19. $\cos A = -\frac{9}{41}$, $\tan A = \frac{40}{9}$; 20. $\cos A = \frac{24}{25}$, $\operatorname{cosec} A = -\frac{25}{7}$;
21. 1; 22. $-2\sin\theta\cos\theta$; 23. $2\sin A$; 24. 1; 25. $\tan A$;
26. 1; 27. 0; 28. $\sec A + \operatorname{cosec} A$; 29. 0; 30. 1; 31. 1;
33. (1) மீப்பெரு மதிப்பு 9, மீச்சிறு மதிப்பு 1
(2) ,, $\frac{a}{2}$, ,, $\frac{a}{3}$

பயிற்சிகள் 12 (பக்கம் 83)

1. $-\frac{23}{27}$; 2. $\frac{117}{125}$; 3. $\frac{9}{13}$.

பயிற்சிகள் 13 (பக்கம் 87)

1. $\sin 4\theta + \sin 2\theta$
2. $\cos 12\theta + \cos 2\theta$
3. $\sin 9\theta - \sin 3\theta$
4. $\cos A - \cos 5A$
5. $\sin 9A - \sin A$
6. $\cos 4A - \cos 12A$
7. $\sin 16\theta - \sin 2\theta$
8. $\frac{1}{2}(\cos 13\theta + \cos 5\theta)$
9. $\frac{1}{2}(\sin 2A + \sin A)$
10. $\frac{1}{2}(\sin 6A - \sin A)$
11. $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{7\theta}{3} + \cos\theta\right)$
12. $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A}{2} - \cos A\right)$
13. $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \cos 2\theta\right)$
14. $\frac{1}{2}(\cos 2B - \cos 2A)$
15. $\frac{1}{2}\{\cos(5A - B) - \cos(7A + B)\}$
16. $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \cos 2A\right)$
17. $-\frac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin 2A\right\}$
18. $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \cos 2\theta\right)$

பயிற்சிகள் 14 (பக்கம் 91)

1. $2\sin 8A\cos 4A$
2. $2\cos 8A\sin 4A$
3. $2\cos 8A\cos 4A$
4. $-2\sin 8A\sin 4A$
5. $2\cos 3\theta\sin 2\theta$
6. $2\sin 10\theta\sin\theta$
7. $2\cos\frac{11a}{2}\cos\frac{5a}{2}$
8. $-2\sin 3a\sin 2a$
9. $2\sin 30^\circ\sin 20^\circ = \sin 20^\circ$
10. $2\sin 60^\circ\cos 10^\circ = \sqrt{3}\cos 10^\circ$

பயிற்சிகள் 23 (பக்கம் 176)

1. 3, 1, 0, −3, −1, 7, −5
2. 3·7226, 1·8455, ·8147, $\bar{3}$·5353, $\bar{1}$·9711, 7·9823, $\bar{5}$·6902
3. 2, 6·91, 9·441, 941·7, ·3643, ·06606.
4. (*a*) ·1441 (*b*) ·4388 (*c*) 317·1
   (*d*) ·0232 (*e*) 24·67 (*f*) ·3018
5. (*a*) 3·32 (*b*) ·36 (*c*) $\frac{3}{2}$
   (*d*) 3·82 (*e*) 28·48.
6. (1) 31 (2) 11 (3) 48 (4) 16.

பயிற்சிகள் 24 (பக்கம் 182)

1. ·1852; 2. ·5088; 3. 2·026; 4. 4·389; 5. ·7144; 6. 1·489; 7. 1·357; 8. −·3959; 9. 1·689; 10. ·8535.

பயிற்சிகள் 25 (பக்கம் 189)

1.	$A=30°$,	$B=60°$,	$b=10·39$.
2.	$B=30°$,	$c=8$,	$a=6·928$.
3.	$B=60°$,	$c=6$,	$b=5·196$.
4.	$A=B=45°$,	$c=5·657$.	
5.	$a=2$,	$c=2·828$.	
6.	$B=66° 30'$,	$a=250$,	$b=575$.
7.	$B=61° 55'$,	$a=1073$,	$b=2012$.
8.	$B=50° 26'$,	$a=45·96$,	$b=55·62$.
9.	$A=13° 25'$,	$a=21·94$,	$b=90·79$.
10.	$A=68° 13'$,	$a=185·7$,	$b=74·22$.
11.	$B=53° 16'$,	$b=65·03$,	$c=81·14$.
12.	$A=21° 8'$,	$b=188·9$,	$c=202·5$.
13.	$B=52° 4'$,	$a=3·118$,	$c=5·071$.
14.	$A=46° 12'$,	$a=53·12$,	$c=73·59$.
15.	$A=31° 24'$,	$B=58° 36'$,	$b=7332$.
16.	$A=56° 3'$,	$B=33° 57'$,	$b=48·32$.
17.	$A=65° 14'$,	$B=24° 46'$,	$b=3·217$.
18.	$A=38° 58'$,	$B=51° 2'$,	$c=21·77$.
19.	$A=81° 30'$,	$B=8° 30'$,	$c=420$.
20.	$A=63°$.	$B=27°$,	$c=43$.

21. AB = 3·442, BC = 3·22, C = 46°54′, B = 43°6′, CA = 4·714.
22. BC = 6·378, AB = 4·369. CA = 6·395, B = 70°14′, A = 69° 46′.

பயிற்சிகள் 26 (பக்கம் 193)

1.	$A=38^\circ\ 53'$,	$B=126^\circ\ 52'$,	$C=14^\circ\ 15'$.
2.	$A=32^\circ\ 11'$,	$B=136^\circ\ 24'$,	$C=11^\circ\ 25'$.
3.	$A=27^\circ\ 21'$,	$B=143^\circ\ 8'$.	$C=9^\circ\ 31'$.
4.	$A=42^\circ\ 6'$,	$B=56^\circ\ 7'$,	$C=81^\circ\ 47'$.
5.	$A=16^\circ\ 26'$,	$B=30^\circ\ 24'$,	$C=133^\circ\ 10'$.
6.	$A=60^\circ$,	$B=38^\circ\ 11'$,	$C=81^\circ\ 49'$.
7.	$A=138^\circ\ 36'$,	$B=15^\circ\ 16'$,	$C=26^\circ\ 8'$.
8.	$A=60^\circ\ 10'$,	$B=76^\circ\ 34'$,	$C=43^\circ\ 16'$.
9.	$A=36^\circ\ 44'$,	$B=55^\circ\ 8'$,	$C=88^\circ\ 8'$.
10.	$A=40^\circ\ 46'$,	$B=26^\circ\ 54'$	$C=112^\circ\ 20'$.
11.	$A=107^\circ\ 27'\ 30''$		
13.	120°		
14.	$105^\circ, 45^\circ, 30^\circ$.		
15.	$105^\circ, 15^\circ, 60^\circ$.		

பயிற்சிகள் 27 (பக்கம் 198)

1.	$A=77^\circ\ 13'$,	$B=43^\circ\ 30'$,	$c=14\cdot99$.
2.	$A=117^\circ\ 25'$	$B=32^\circ\ 11'$,	$c=31\cdot43$.
3.	$A=109^\circ\ 40'$,	$C=19^\circ\ 38'$,	$b=559\cdot63$.
4.	$C=43^\circ\ 15'\ 30''$,	$B=82^\circ\ 37'\ 30''$,	$a=44\cdot93$.
5.	$A=64^\circ\ 19'$,	$B=78^\circ\ 16'$,	$c=10\cdot6$.
6.	$A=83^\circ\ 25'$,	$B=36^\circ\ 35'$.	
7.	$B=108^\circ\ 36'$,	$C=31^\circ\ 24'$.	
8.	$B=27^\circ\ 42'$,	$C=50^\circ\ 46'$,	$a=6\cdot325$
9.	$c=9\cdot37$.		
10.	$c=32\cdot3$.		
11.	$a=194\cdot5$.		

பயிற்சிகள் 28 (பக்கம் 211)

1.	$B=60^\circ$,	$C=90^\circ$,	$c=10\sqrt{3}$.
2.	$A=75^\circ$,	$B=90^\circ$,	$b=2\sqrt{6}$ அல்லது
	$A=105^\circ$,	$B=60^\circ$,	$b=3\sqrt{2}$.
3.	$77^\circ\ 27'$,	$51^\circ\ 18'$	$6\cdot24$ அல்லது
	$102^\circ\ 33'$,	$26^\circ\ 12'$,	$3\cdot53$.
4.	$15^\circ\ 50'$,	$36^\circ\ 50'$,	$2\cdot9$.

5.	80° 6′	45° 19′	4·52 அல்லது
	99° 54′,	25° 31′,	2·74
6.	56° 11′,	60° 19′,	7·99.
7.	31° 30′,	16°,	27′.
8.	76° 36′,	43° 14′	3620 அல்லது
	103° 24′	16° 26′	1495
9.	21° 46′,	106° 14′,	310·8.
10.	தீர்வு இல்லை.		
11.	95° 4′,	49° 41′,	96·68 அல்லது
	14° 26′,	130° 19′,	24·19.
12.	66° 41′,	73° 19′,	10·43 அல்லது
	113° 19′,	26° 41′,	4·89.

13. 138° 39′, 18° 28′, 192.

14, 67° 55′, 71° 38′, 10·34 அல்லது 112° 5′, 27° 28′, 4·976.

15. 70° 1′, 59° 59′, 106·23 அல்லது 109° 59′, 20° 1′, 41·98.

பயிற்சிகள் 29 (பக்கம் 212)

1. 65°, 8·51, 12·8.
2. 55°, 70·8, 56·1.
3. 79° 23′, 7·31, 8·36,
4. 22° 18′, 36·5, 28·6.
5. 118° 11′, 4·06, 3·33.
6. 17° 55′, 99·7, 176.
7. 20° 25′, 38·3, 58·4.

பயிற்சிகள் 30 (பக்கம் 219)

1. $\frac{b \sin \beta \cos a}{\sin (\beta - a)}$, 365 அடி.
3. $\frac{h \cos a}{\sin (\beta - a)}$, 575·8 அடி.
5. $\frac{ab}{a-b}$.
7. 260·2 அடி, 3690 அடி.
8. 78·32, 93·35.
9. $h \tan a \cot \beta$.
10. 97·5 அடி.
11. $\frac{1}{3}\sqrt{6}$ மைல்.
12. 7·4 கஜம்.
13. 3·45 மைல்.
14. 519·6.
18. $\frac{a \sin \beta \cos(a+\beta)}{\cos (a+2\beta)}, \frac{a \sin a}{\cos(a+2\beta)}$
22. 516·4 அடி.
23. 1837 அடி.

பயிற்சிகள் 31 (பக்கம் 229)

5. $\frac{1}{4}\sqrt{6}$ மைல் அல்லது $440\sqrt{6}$ கஜம்.
6. 235·8 அடி.
10. 1·457.

பயிற்சிகள் 32 (பக்கம் 243)

1. $2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$
2. $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$
3. $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}$
4. $n\pi - (-1)^n \frac{\pi}{4}$
5. $n\pi - (-1)^n \frac{\pi}{6}$
6. $2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$
7. $n\pi + \frac{\pi}{4}$
8. $n\pi + \frac{3\pi}{4}$
9. $n\pi \pm \tan^{-1} 2$
10. $n\pi + \tan^{-1} 2$
11. $\frac{n\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{12}$
12. $\frac{2n\pi}{3} \pm \frac{\pi}{9}$
13. $\frac{n\pi}{4} + \frac{\pi}{24}$
14. $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{3}$
15. $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$
16. $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ அல்லது $2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$
17. $n\pi + \frac{\pi}{4}$
18. $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ அல்லது $2n\pi \pm \frac{5\pi}{6}$
19. $n\pi + \frac{5\pi}{6}$
20. $n\pi \pm \frac{\pi}{3}$
21. $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$, $2n\pi + \frac{\pi}{2}$
22. $\sin\theta = 1$ அல்லது $-\frac{1}{3}$
23. $n\pi \pm \frac{\pi}{3}$
24. $n\pi$
25. $2n\pi \pm \cos^{-1} \frac{\sqrt{41} - 5}{8}$
26. $n\pi$, $n\pi - \frac{\pi}{4}$
27. $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$
28. $n\pi + \frac{\pi}{4}$, $n\pi - \tan^{-1} 2$
29. $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$
30. $2n\pi \pm \frac{5\pi}{6}$
31. $n\pi + \frac{\pi}{4}$, $n\pi + \frac{\pi}{3}$
32. $n\pi + \frac{2\pi}{3}$, $n\pi + \frac{5\pi}{6}$
33. $n\pi \pm \frac{\pi}{4}$
34. $n\pi$, $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$
35. $n\pi \pm \frac{\pi}{6}$
36. $(2n+1)\pi$, $2n\pi \pm \cos^{-1}\frac{5}{8}$
37. $n\pi \pm \frac{\pi}{6}$
38. $n \times 180^\circ \pm 14^\circ\, 29'$
39. $n \times 180^\circ \pm 48^\circ\, 36'$, $n \times 180^\circ \pm 53^\circ\, 8'$
40. $n\pi$, $2n\pi \pm \cos^{-1}\frac{1}{3}$

பயிற்சிகள் 33 (பக்கம் 244)

1. $\frac{n\pi}{5}$

2. $(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{4}$

3. $n\pi,\ \frac{n\pi}{3}$

4. $\frac{2n\pi}{3}+\frac{\pi}{6},\ 2n\pi-\frac{\pi}{2}$

5. $n\times 90^\circ-15^\circ,\ n\times 45^\circ-\frac{7^\circ}{4}$.

6. $n\times 180^\circ+5^\circ,\ n\times 90^\circ-\frac{5}{2}^\circ$.

7. $\frac{2n\pi}{7},\ \frac{2n\pi}{3}$.

8. $\frac{2n\pi}{m+p},\ \frac{2n\pi}{m-p}$.

9. $\frac{2n\pi}{m-p}-\frac{\pi}{2(m-p)},\ \frac{2n\pi}{m+p}+\frac{\pi}{2(m+p)}$.

10. $(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{m-p}$.

11. $(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{m}\pm\frac{a}{m}$.

12. $(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{3}\pm\frac{a}{3}$.

13. $\frac{n\pi}{2}\pm\frac{a}{2}$.

14. $\frac{n\pi}{5}+\frac{\pi}{10}$.

பயிற்சிகள் 34 (பக்கம் 246)

1. $53^\circ\ 8'$.

2. $36^\circ\ 52'$.

3. $20^\circ\ 48',\ 122^\circ\ 20'$.

4. $16^\circ\ 16',\ 36^\circ\ 52'$.

5. $100^\circ\ 2'$

6. $36^\circ\ 52'$.

7. $45^\circ,\ 90^\circ$.

8. $24^\circ\ 54',\ 98^\circ\ 48'$.

9. $2n\times 180^\circ-90^\circ,\ 2n\times 180^\circ+46^\circ\ 24'$.

10. $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}$.

11. $n\pi+\frac{\pi}{6}+(-1)^n\frac{\pi}{4}$.

12. $2n\pi+\frac{\pi}{4}$.

13. $2n\times 180^\circ+78^\circ\ 58',\ 2n\times 180^\circ+27^\circ\ 18'$.

14. $2n\pi+\frac{\pi}{6}$.

15. $2n\pi+\frac{\pi}{6}$.

16. $n\times 180^\circ-63^\circ\ 26'+(-1)^n\ 22^\circ\ 48'$.

17. $2n\pi+\frac{\pi}{4}\pm A$.

பயிற்சிகள் 35 (பக்கம் 247)

1. $n\pi,\ \frac{n\pi}{2}\pm\frac{\pi}{6}$.

2. $(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2},\ 2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}$.

3. $\frac{n\pi}{3},\ \frac{n\pi}{2}\pm\frac{\pi}{12}$.

4. $\frac{n\pi}{5},\ \frac{2n\pi}{3}\pm\frac{\pi}{9}$.

5. $(2n+1)\frac{\pi}{4}$, $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$.

6. $(2n+1)\frac{\pi}{10}$, $n\pi \pm \frac{\pi}{3}$.

7. $(2n+1)\frac{\pi}{2}$, $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$.

8. $n\pi + \frac{a}{2} \pm \frac{\pi}{6}$.

9. $\frac{n\pi}{6}$, $\frac{n\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12}$.

10. $\frac{n\pi}{2}$, $\frac{2n\pi}{7} \pm \frac{\pi}{21}$.

11. $2n\pi$, $\frac{n\pi}{2}$, $\frac{n\pi}{9}$.

12. $\frac{n\pi}{2} + \frac{a}{4} \pm \frac{\pi}{16}$.

13. $\frac{a}{7} + \frac{n\pi}{7} + (-)^n \frac{\pi}{14}$.

14. $n\pi - a$, $2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$.

15. $n\pi + \frac{\pi}{2} - a$, $2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$.

16. $\frac{2n\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$, $n\pi + \frac{\pi}{4}$, $2n\pi + \frac{\pi}{2}$.

பயிற்சிகள் 36 (பக்கம் 255)

2. $\sin 285° = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$, $\cos 285° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

6. (1) 315°, 405°. (2) 225°, 315°. (3) 135°, 225°.
(4) 90°, 270°. (5) 90°. 270°.

பயிற்சிகள் 37 (பக்கம் 274)

1. (*a*) π. (*b*) $\frac{2\pi}{3}$. (*c*) $\frac{2\pi}{\sqrt{p}}$. (*d*) $2p$. (*e*) $\frac{\pi}{p}$.
(*f*) $\frac{1}{p}$. (*g*) 1. (*h*) 1. (*i*) 6. (*j*) 4π.

3. (*a*) 3, $-\cdot 19$; (*b*) $1\cdot 76, -\cdot 37$; (*c*) $\sqrt{a^2+b^2}, -\sqrt{a^2+b^2}$.

4. (*a*) $\theta = 2n\pi$ அல்லது $n\cdot 360° + 73°\ 44'$
(*b*) $n\cdot 360° + 170°$ அல்லது $n\cdot 360° + 315°$
(*c*) $32\frac{3}{4}°$ அல்லது 72°
(*d*) 15°
(*e*) 18°
(*f*) 27°, 64·3°, 115·7°, 153°

5. 5, 103·3°, 330·5°

கலைச் சொற்கள்

Abscissa-மட்டாயம்
Accurate-திட்டமான, சரியான
Addition-கூட்டல்
Adjacent-அடுத்த
Algebra-இயற்கணிதம்
Alternate-ஒன்றுவிட்ட
Altitude-செங்கோடு
Ambiguous-ஈரடியான
,, case-ஈரடிவகை
Angle-கோணம்
,, Acute-குறுங்கோணம்
,, Adjacent-அடுத்த கோணம்
,, Arms of an-கோணச் சிறைகள்
,, Complementary-நிரப்புங்கோணம்
,, Exterior-வெளிக் கோணம்
,, Interior-உட்கோணம்
,, Obtuse-விரிகோணம்
,, of depression-இறக்கக் கோணம்
,, of elevation-ஏற்றக் கோணம்
,, Positive-மிகைக்கோணம்
,, Negative-குறைக் கோணம்
,, Subsidary உதவிக்கோணம்
,, Right-செங்கோணம்
,, Straight-நேர்கோணம்
,, Supplementary-நிமிர்க் குங் கோணம்
,, Vertical-உச்சிக்கோணம்
Anti-clock wise-இடமாக
Anti-logarithm-இனமடக்கை
Approximate-அணித்தான, ஏறக் குறைய
Approximate value-அண்ணளவு
Approximately-அண்ணளவாக
Arc-வில்
Area-பரப்பளவு, பரப்பு
Axis of co-ordinates-துணையாயம்
Base of a logarithm-மடக்கை அடி
Bearing-திசைக்கோணம்
Bisect-சமமாய் வெட்டு
Bisector-சமவெட்டி
Calculate-கணக்கிடு
Calculation-கணக்கீடு
Cardinal points-தலைத்திசைகள்
Case-வகை
Central-நடுவான, மையமான
Centre-நடு, மையம்
,, circum-சுற்று மையம்
,, Ex-வெளிவட்டம்
,, In-உள்வட்டம்
,, ortho-செங்கோட்டு மையம்
Centroid-நடுக்கோட்டு மையம்
Characteristic (of log)-(மடக்கை) முழு எண்
Chord-நாண்
Circle-வட்டம்
,, Circum-சுற்று வட்டம்
,, Ex-வெளிவட்டம்
,, In-உள்வட்டம்
,, Nine point-ஒன்பது புள்ளி வட்டம்
,, Semi-அரை வட்டம்
Circular-வட்டமான
,, measure-வட்டமுறை யளவு
Circumference-சுற்றளவு, வட்ட வரை
Clockwise-வலமாக
Coincide-ஒன்றுபடு, பொருந்து
Collinear-ஒரு வரைய, ஒரே கோட்டிலுள்ள
Column-நிரல்

Commensurable-பொதுஅளவுள்ள
Common tangents-பொதுத் தொடுவரைகள்
Complement-நிரப்புவது
Complementary-நிரப்பும்
Compound-கூட்டு, கலப்பு
Concentric-ஒரு மைய
Concurrent-சந்திக்கும்,ஒன்றுகூடும்
Concyclic-ஒரே வட்ட
Condition-கட்டுப்பாடு
Congruence-அடங்கலுமொத்தல்
Congruent-அடங்கலுமொத்த
Consecutive-அடுத்தடுத்த, தொடர்ச்சியான
Contact-தொடு
,, **point of**-தொடுபுள்ளி
Converse-தலைமாற்று
Conversely-தலை மாற்றி (யுரைக்கின்)
Co-ordinate-ஆயத்தொலை
Co-planar-ஒரே தளமான
Corollary-கிளைத்தேற்றம்
Correspond-ஒத்திரு
Correspondence-ஒத்திருத்தல்
Corresponding-ஒத்த, எதிர்நிலையான
Cosecant-எதிர்நெடுக்கை
Cosine-கிடக்கை
Co-tangent-எதிரிருக்கை
Counter-clockwise-இடமாக
Cyclic-ஒருவட்ட
Data-ஆதரவுகள்
Decimal-பதின் பகுப்பு
,, **notation**-பதின் குறியீடு
,, **point**-பதின் பகுப்புப் புள்ளி
,, **pure**-தனிப்பதின் பகுப்பு
Deduce-பகுத்தறி
Define-வரையறு
Definition-வரையறை
Degree (of angle)-பாகை
,, **(of equation)**-(சமன்பாட்டின்) படி
Diameter-விட்டம்
Difference-மிச்சம், வேற்றுமை
Degit-தனியிலக்கம்
Distance-தொலை
Divide-வகு
Element- உறுப்பு
Elementary Mathematics- தொடக்கக் கணிதம்
Eliminate-நீக்கு
Elimination-நீக்கல், விலக்கல்
Equal-சமன், சமமான
Equation-சமன்பாடு
,, **Solution of an**-சமன்பாட்டின் தீர்வு
,, **Solve an**-சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்
Equiangular-சமகோண
Equilateral-சமபக்க
Expression-கோவை
Figure-இலக்கம், வடிவு, வரைப்படம்
Fixed-நிலைத்த
Form-உருவம்
Formula-வாய்பாடு
Fraction-பின்னம்
,, **Decimal**-பதின் பின்னம்
Fractional-பின்ன
Function-சார்பலன்
Fundamental relations-அடிப்படையான தொடர்புகள்
Fundamental Unit-அடிப்படையலகு
Generalise-பொது விதி காண, பொதுப்படுத்து
Geometry-வடிவ கணிதம்
,, **Solid**-திண்ம வடிவ கணிதம்
Graph-கோட்டுப்படம்
Height-உயரம்
Hexagon-அறுகோணம்
Horizon-தொடுவானம்
Horizontal-மட்டமான, படுமட்ட
Hypotenuse-செங்கோண எதிர்சிறை
Identical-முழுதுமொத்த
Identity-முற்றொருமை

Image-படிவம்
Imaginary-கற்பனையான
Inclination-சாய்வு, வாட்டம்
Inclined plane-சாய்வுமட்டம்
Incommensurable-பொது அள வற்ற
Index-படிக்குறி
Infinite-முடிவற்ற
,, **number**-பென்னம்பேரெண்
Integer-முழு எண்
Intersect-வெட்டு
Intersection-வெட்டுதல்
Invariable-மாறாத
Isosceles-இரு சமபக்க
Length-நீளம்
Limit-எல்லை
Logarithm-மடக்கை
Magnitude-பருப்பம், அளவு
,, **Relative**-ஒப்புப்பருப்பம்
Mantissa-மடக்கைப் பின்னம்
Maximum-மீப்பெரிது, மீப்பெரு
Measure-அளவு
Measurement-அளத்தல்
Median-நடுக்கோடு
Minimum-மீச்சிறிது, மீச்சிறு
Minute (angle)-கலை
,, **(time)**-நிமிடம்
Multiple-மடங்கு
Multiplication-பெருக்கல்
Negative-குறை, எதிர்
,, **quantity**-குறைக்கணியம்
Number-எண்
,, **imaginary**-கற்பனை எண்
,, **Pure**-தனியெண்
,, **Real**-மெய்யெண்
Numerical-எண்ணாலாய
Oblique-சாய்ந்த
Ordinate-குத்தாயம்
Origin-ஆதி, பிறப்பிடம்
Parallel-ஒரு போகு, இணை
Parallel lines-இணைக்கோடுகள், ஒருபோகுக்கோடுகள்
Parallelogram-ஒரு போகு நாற் சிறையி
Pedal triangls-செவ்வடி முக்கோ ணம்
Pentagon-ஐங்கோணம்
Perimeter-சுற்றளவு
Period-போழ்து
Periodical-போழ்தில் மீளும்
Perpendicular-குத்துக்கோடு
Polygon-பல கோணம்
Polygon of *n* sines-*n*-கோணம்
Positive-சேர்க்கை, மிகை
,, **number**-மிகை எண்
,, **quantity**-மிகைக்கணியம்
Power-படி
Problem-கணக்கு
Progression-தொடர்
,, **Arithmetic**-கூட்டுத் தொடர்
,, **Geometric**-பெருக்குத் தொடர்
,, **Harmonic**-இசைத்தொடர்
Proof-தெரிப்பு
Property-பண்பு
Prove-நிறுவு
Quadrilateral-நாற்சிறை
Quantity-கணியம்
Quotient-ஈவு
Radian-ஆரையன்
Radian measure-ஆரையன் அளவு
Radius-ஆரை
,, **Circum**-சுற்றுவட்ட ஆரை
,, **In**-உள்வட்ட ஆரை
,, **Ex**-வெளிவட்ட ஆரை
Range-வீச்சு
Ratio-தகவு
,, **Trigonometrical**-கோண கணிதத் தகவு
Reciprocal-மாறுபட்ட
Rectangle-நீளசதுரம்
Regular-ஒழுங்கான
Revolved angle-சுற்றின கோணம்
Revolving line-சுற்றுங்கோடு
Revolution-சுற்று
Root-சமன்பாட்டின் தீர்வு
Secant-வெட்டுவரை

Secant (**Trig.**)-எதிர்கிடக்கை
Second (**angle**)-விகலை
,, (**time**)-நொடி
Segment Alternate-மாற்றுவட்டப் பகுதி
Sexagesimal-அறுபான் பகுப்பு
Side-சிறை, பக்கம்
Sign-குறியீடு, அடையாளம்
Similar-வடிவொத்த
Simplify-சுருக்கு
Sine (**of angle**)-(கோண) நெடுக்கை
Size-பருமன்
Solid-திண்மம், திண்ணிய
Solution-தீர்வு, விடை
Solve-தீர், விடுவி
Standard-திட்டம், திட்ட அளவு
,, **form**-திட்ட அமைப்பு
,, **unit**-திட்ட அலகு
Substitute-ஈடு, ஈடாக்கு, மாற்று
Substitution-ஈடாக்கல், மாற்றல்
Subtend-எதிர்வீழ்த்து
Subtract-கழி, நீக்கு
Subtraction-கழித்தல், நீக்கல்
Sum-மொத்தம், கூட்டுத் தொகை
Summation-கூட்டல்
Supplement-சேர்க்கை, நிமிர்க்குங் கோணம்
Supplementary-நிமிர்க்கும்
Survey-நில அளவை
Symbol-அடையாளம், குறியீடு
System-முறை
Table-வாய்பாடு
Tabulate-நிரலிடு
Tangent-தொடுவரை
,, (**Trig.**)-இருக்கை
Term-உறுப்பு
Theorem-தேற்றம்
Theory-கொள்கை
Triangle-முக்கோணம்
,, **Equilateral**-சமபக்க முக்கோணம்
,, **Ex-centric**-வெளி மைய முக்கோணம்
,, **Isosceles**-இரு சம பக்க முக்கோணம்
,, **Rt. angle**-செங்கோண முக்கோணம்
Trigonometry-கோண கணிதம்
,, **Analytical**-பகுப்பு கோண கணிதம்
,, **Plane**-மட்ட கோண கணிதம்
,, **Spherical**-கோள கோண கணிதம்
Unit-அலகு
Value-மதிப்பு
Vertex-கோண உச்சி, முனை
Vertical-செங்குத்தான
Zero-சுன்னம், சுழி

